

ALGEBRY LOGIKY A LOGICKÉ FUNKCIE

Boolova algebra

- 1849 - George Boole
 - algebraická formulácia procesov logického myslenia
- je algebraický systém $(B, \cdot, +, ', 0, 1)$
 - 2 prvky 0 a 1
 - 3 základ. operátory: AND, OR, NOT
 - platí: $x \cdot y$, $x + y$, x' sú tiež prvkami z B

- 6 postulátov:

1.postulát:

V Booleovej algebre sa dva výrazy rovnajú, ak jeden výraz možno nahradiť druhým.

2.postulát:

Existencia prvku 1 a 0

$$x \cdot 1 = x$$

$$x + 0 = x$$

3.postulát:

Komutatívny zákon

$$x + y = y + x$$

4.postulát:

Asociatívny zákon

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

5.postulát:

Distributívny zákon

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

6.postulát:

Existencia komplementu

$$x \cdot x' = 0$$

$$x + x' = 1$$

7.postulát:

Zákon identickej mocniny

$$x + x = x$$

$$x \cdot x = x$$

8.postulát:

Vlastnosti prvkov 1 a 0

$$x + 1 = 1$$

$$x \cdot 0 = 0$$

- De Morganove pravidlá (pravidlá inverzie)

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\overline{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \dots \cdot \overline{x_n}$$

$$\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \dots + \overline{x_n}$$

Zobecnenie uvedených pravidiel vyjadruje Shannonovo pravidlo v tvare

$$\overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n, +, \cdot)} = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \cdot, +)$$

- Peirceova algebra

- Peirceova algebra je algebraický systém, ktorý obsahuje najmenej dva prvky 0 a 1 a jeden základný operátor NOR, ktorý sa označuje ako Peirceov operátor. Tento operátor možno vyjadriť v tvare:

$$x \downarrow y = \overline{x + y}$$

- Peirceova algebra

- z pravidiel Booleovej algebry platia len dve:

1. komutatívny zákon

$$x \downarrow y = y \downarrow x$$

pretože

$$x \downarrow y = \overline{x + y} = \overline{y + x} = y \downarrow x$$

2. pravidlo spojovania

$$(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow \bar{y}) = x$$

pretože

$$(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow \bar{y}) = \overline{\overline{x + y} + \overline{x + \bar{y}}} = (x + y) \cdot (x + \bar{y}) = x$$

- Schefferova algebra

- Schefferova algebra je algebraický systém, ktorý obsahuje najmenej dva prvky 0 a 1 a jeden základný operátor NAND, ktorý sa označuje ako Schefferov operátor. Tento operátor možno vyjadriť v tvare:

$$x | y = \overline{x \cdot y}$$

- Schefferova algebra

- z pravidiel Booleovej algebry platia len dve:

1. komutatívny zákon

$$x | y = y | x,$$

pretože

$$x | y = \overline{x \cdot y} = \overline{y \cdot x} = y | x.$$

2. pravidlo spojovania

$$(x | y) | (x | \bar{y}) = x,$$

pretože

$$(x | y) | (x | \bar{y}) = \overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{x \cdot \bar{y}}} = \overline{\overline{x \cdot y}} + \overline{\overline{x \cdot \bar{y}}} = x \cdot y + x \cdot \bar{y} = x.$$

- Logické funkcie

- Logické funkcie sú funkcie, ktorých argumenty a funkčné hodnoty nadobúdajú konečný počet hodnôt. Dvojhodnotové logické funkcie sa nazývajú **Boolovými funkciami**.

- log. funkcia: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

- oblasť definície: množina 2^n navzájom rôznych n-tíc

$$f(x_1, x_2) \longrightarrow \{00, 01, 10, 11\}$$

- hodnota log. funkcie môže nadobudnúť hodnoty:

0 a 1

- Zápis logických funkcí

Zápis logických funkcí pomocí tabulky

- obsahuje všechny n - tice argumentov a im zodpovedajúce hodnoty
- **úplne** a **neúplne** určená logická funkcia

číslo bodu	x_2	x_1	$f(x_1, x_2)$
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

číslo bodu	x_2	x_1	$f(x_1, x_2)$
0	0	0	0
1	1	0	0
3	1	1	1

- Zápis logických funkcí

Zápis pomocou množín funkčných hodnôt

Úplne určenú logickú funkciu z predošlého príkladu možno vyjadriť nasledovne

$$f(x_1, x_2) = M_1 = \{3\}$$

$$f(x_1, x_2) = M_0 = \{0, 1, 2\}.$$

Neúplne určenú logickú funkciu z predošlého príkladu možno vyjadriť nasledovne

$$f(x_1, x_2) = M_1 = \{3\} \quad f(x_1, x_2) = M_0 = \{0, 1\}$$

$$f(x_1, x_2) = M_x = \{2\}.$$

- Zápis logických funkcií

Zápis logických funkcií v kanonickom tvare

Každú logickú funkciu možno vyjadriť pomocou dvoch kanonických tvarov.

1. kanonický tvar

- vyjadruje logickú funkciu $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ v tvare **súčtu súčinov** premenných. Možno ho zapísať v tvare:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum f(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) x_1^{e_1} x_2^{e_2} x_3^{e_3} \dots x_n^{e_n}$$

$e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ - aktuálna kombinácia premenných,

pričom platí $e_i \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

- Zápis logických funkcí

Zápis logických funkcí v kanonickom tvare

$f(e_1, e_2, e_3 \dots e_n)$ - funkčná hodnota logickej funkcie pre aktuálnu kombináciu premenných,

pričom $f(e_1, e_2, e_3 \dots e_n) \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

Pre $x_i^{e_i}$ platí

$$e_i = 1 \quad x_i^{e_i} = x_i^1 = x_i$$

$$e_i = 0 \quad x_i^{e_i} = x_i^0 = \bar{x}_i$$

- Zápis logických funkcí

Zápis logických funkcí v kanonickom tvare

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum (x_1^{e_1} x_2^{e_2} x_3^{e_3} \dots x_n^{e_n})$$

- vyjadrenie logickéj funkcie v uvedenom kanonickom tvare sa nazýva **úplná normálna disjunktívna forma (UNDF)**. Každý člen v tomto vyjadrení sa nazýva **minterm**.

- Zápis logických funkcí

Zápis logických funkcí v kanonickom tvare

2. kanonický tvar

- vyjadruje logickú funkciu $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ v tvare **súčinu súčtov** premenných. Možno ho zapísať v tvare:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \prod [f(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) + (x_1^{e_1} + x_2^{e_2} + x_3^{e_3} + \dots + x_n^{e_n})],$$

- Zápis logických funkcí

Zápis logických funkcí v kanonickom tvare

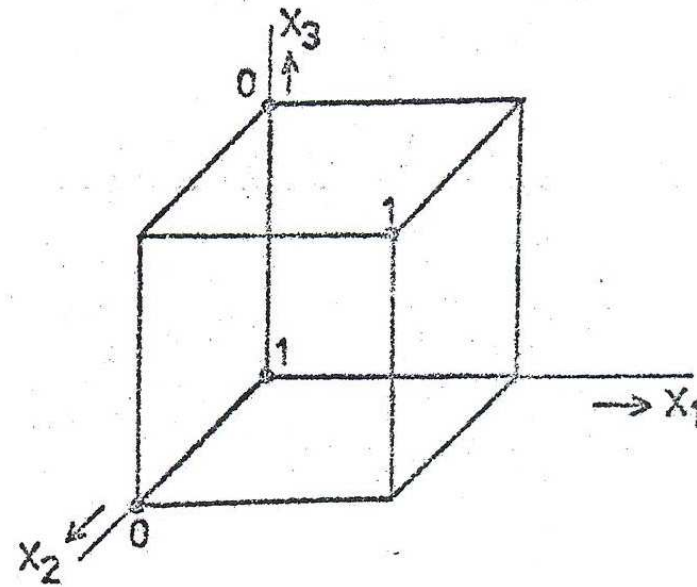
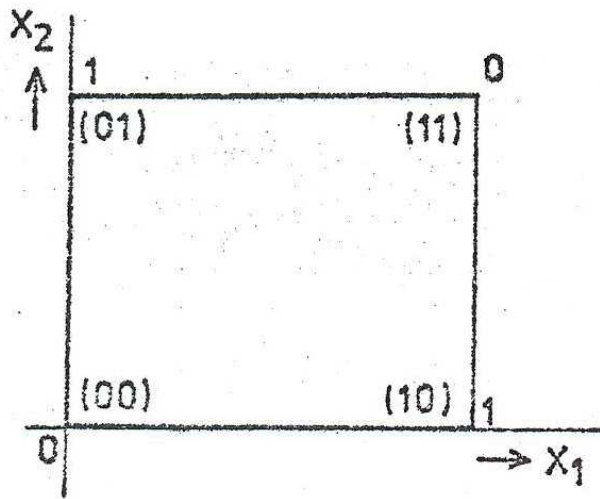
$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \prod (x_1^{e_1} + x_2^{e_2} + x_3^{e_3} + \dots + x_n^{e_n})$$

- vyjadrenie logickéj funkcie v uvedenom kanonickom tvare sa nazýva **úplná normálna konjuktívna forma (UNKF)**. Každý člen v tomto vyjadrení sa nazýva **maxterm**.

- Grafické znázornenie logických funkcií
zápis log. f. vo vrcholoch n-rozmernej kocky

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

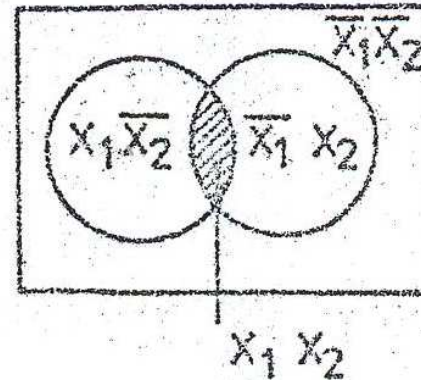
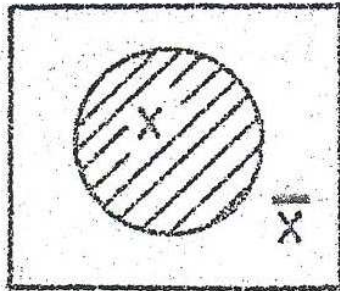
x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
1	1	1	1



- Grafické znázornenie logických funkcií

Vennove diagramy

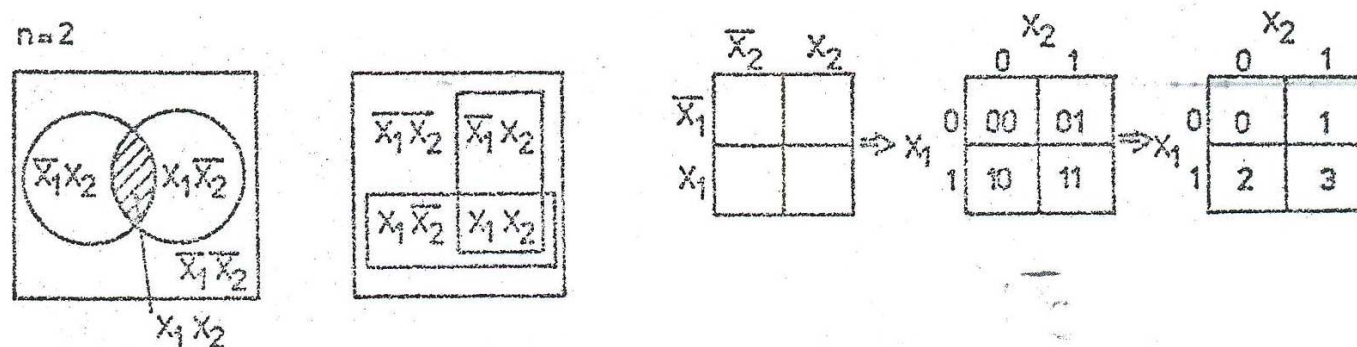
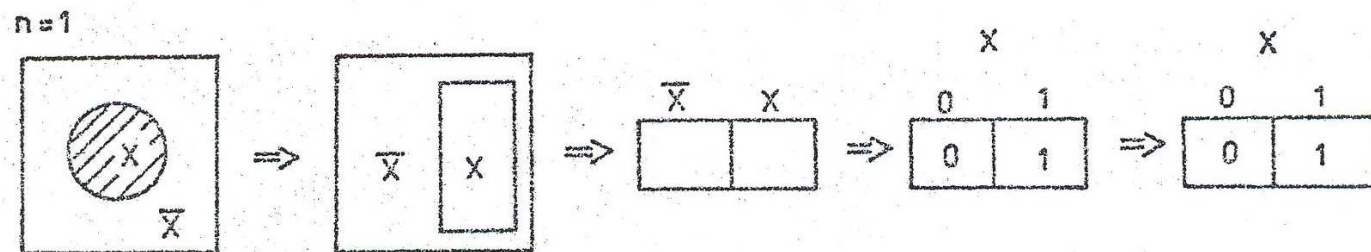
- Definičná oblasť funkcie je predstavená rovinným útvarom, pričom každej premennej sú v tomto útvare priradené dve oblasti. V jednej oblasti premenná nadobúda hodnotu **1**, v druhej **0**.



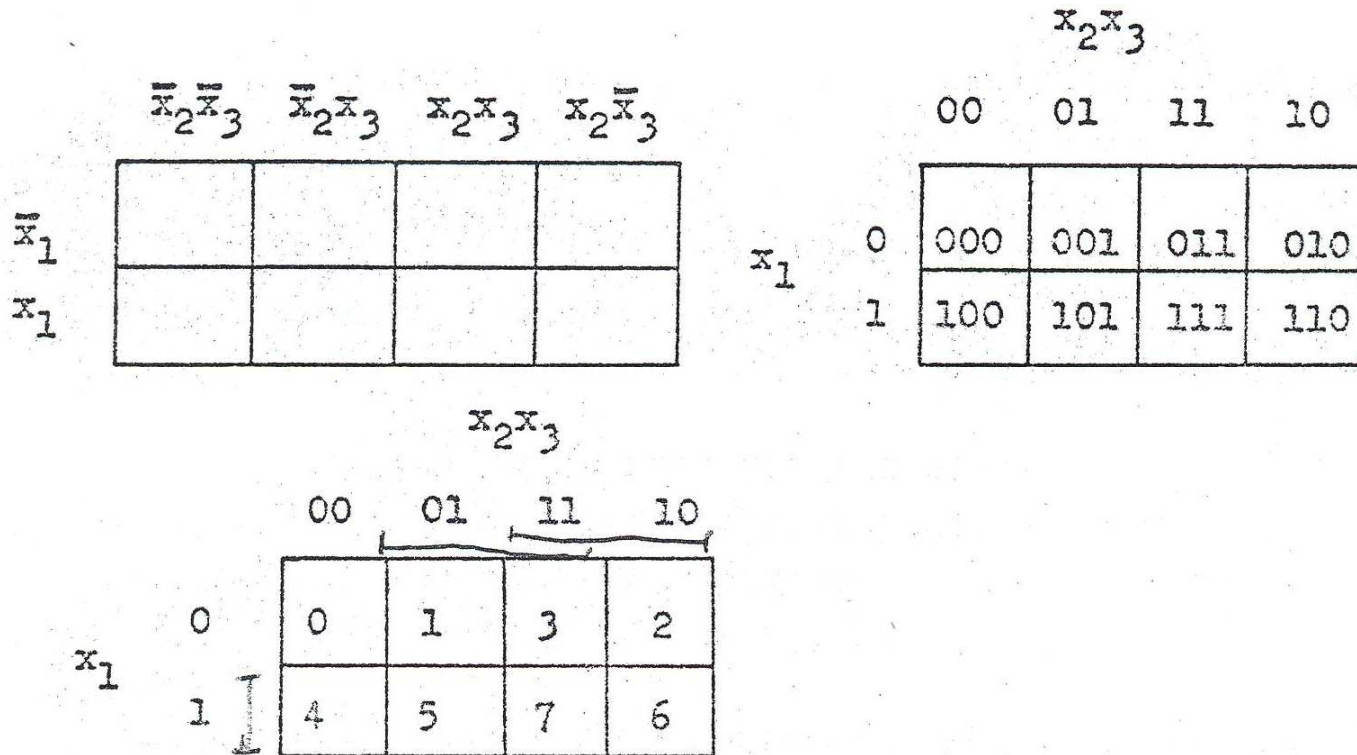
- Grafické znázornenie logických funkcií

Karnaughove mapy

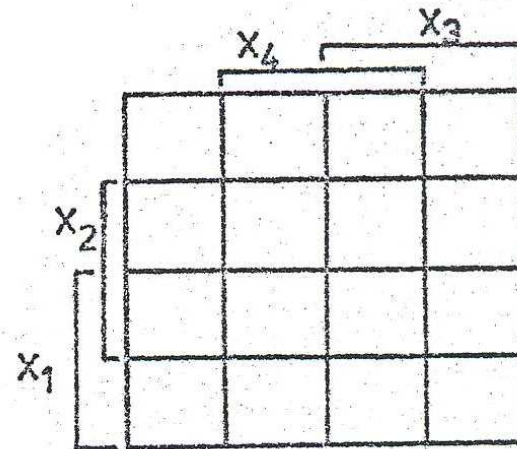
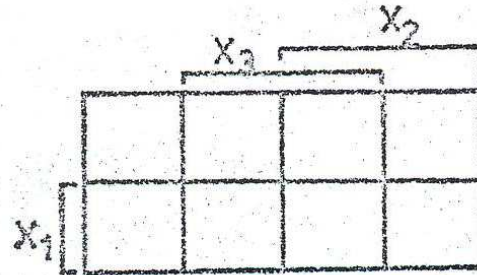
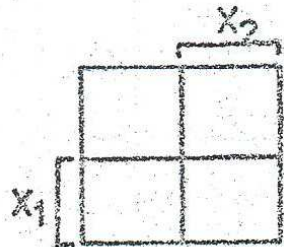
- sú odvodené z Venových diagramov. Každéj oblasti z Venovho diagramu zodpovedá jeden štvorček mapy. Počet štvorčekov pre n -premenných je 2^n . Prechod od Venových diagramov ku Karnaughovým mapám:



- Grafické znázornenie logických funkcií
Karnaughove mapy pre $n=3$



- Grafické znázornenie logických funkcií
Karnaughove mapy



- Najviac používané logické funkcie sa znázorňujú schematicky pomocou značiek. Uvedieme príklady značenia niektorých logických funkcií:

