

## 2. OPTICKÉ VLNOVODY

### 2.1 ROZDELENIE A ZÁKLADNÉ TYPY OPTICKÝCH VLNOVODOV

Pod pojmom **optický vlnovod (dielektrický svetlovod)** možno zo všeobecnejšieho hľadiska zahrnúť dielektrické štruktúry, ktoré umožňujú prenos energie elektromagnetickými vlnami z oblastí optických frekvencií. Z technického hľadiska sa však týmto pojmom označujú len také štruktúry, ktoré umožňujú priestorovo definované a nízkostratové vedenie elektromagnetických vln pozdĺž rozhraní medzi oblasťami s rôznym indexom lomu, pričom dochádza k sústredeniu prenášanej energie do oblastí tohoto rozhrania, podobne ako je to pre analogické typy vlnovodov určených pre oblasť mikrovlín. Je zrejmé, že i po tomto obmedzení môžu takéto vlastnosti mať štruktúry, ktoré sa veľmi líšia čo do tvaru, zloženia aj konštrukcie. V praxi najpoužívanejšie sú optické vlnovody tvaru **optických vlákien** alebo **planárne vlnovody (svetlovody)**.

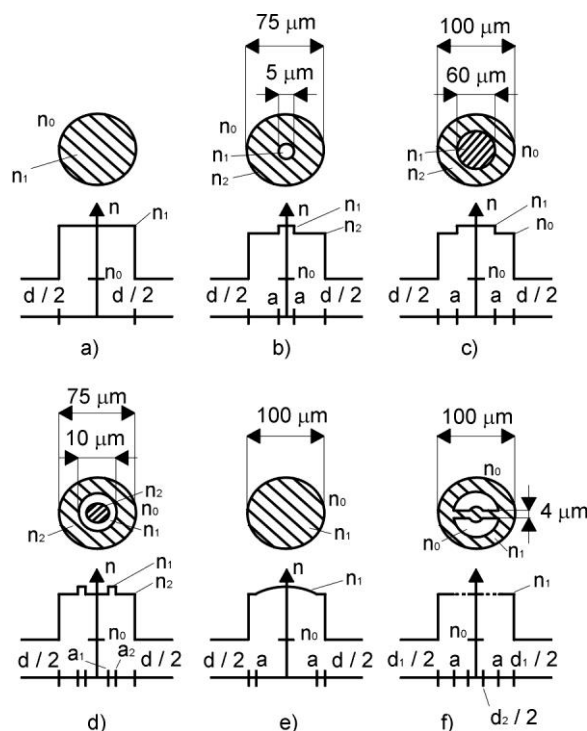
Od r. 1950 existuje priemyslová výroba optických vlákien. Tieto z hľadiska aplikácií možno rozdeliť do niekoľkých skupín:

1. Telekomunikačné vlákna pre veľké vzdialenosti.
2. Telekomunikačné vlákna pre stredné vzdialenosti a miestny styk a lokálne komunikácie.
3. Vlákna pre osvetľovanie, kontrolné, diagnostické a meracie systémy.
4. Vlákna pre špeciálne systémy (vojenské, pozorovacie, prenos obrazu a pod.).
5. Vlákna na prenos energie (pre lekárske účely – špeciálny skalpel, obrábanie a pod.).
6. Vlákna pre senzorové systémy.

Každá z aplikácií vyžaduje špecifické vlastnosti optických vlákien. Z hľadiska **prenosových (telekomunikačných) aplikácií** sú základnými parametrami optického vlákna predovšetkým prenášaná **vlnová dĺžka (frekvencia)**, **počet a typ prenášaných vidov**, **rýchlosť ich šírenia**, **tlmenie**, **dispéria**, **kritická frekvencia** a **šírka základného (dominantného) vidu**.

Konštrukčné usporiadanie najdôležitejších typov optických vlákien s uvedením ich charakteristických profilov indexov lomu a typických rozmerov je znázornené na **obr. 2.1**. Základným materiálom sú v súčasnosti väčšinou veľmi čisté sklá na báze  $\text{SiO}_2$ , v niektorých prípadoch sa tiež používa kombinácia anorganických aj organických materiálov (silikóz, rôzne plasty). Existujú však aj celoplastové optické vlákna.

Najjednoduchším optickým vláknom (**obr. 2.1 a**) je vlákno z jediného dielektrického materiálu bez plášťa. Nespojitosť indexu lomu je na povrchu vlákna (rozhranie vlákno-vzduchu), preto časť elektromagnetického poľa vedenej vlny sa rozkladá v priestore mimo vlákno, z čoho vyplýva, že akékoľvek oporné prvky ovplyvňujú prenosové vlastnosti tohto vlákna. Preto toto vlákno nie je vhodné pre prenosové účely. Na **obr. 2.1 b** a **obr. 2.1 c** sú znázornené veľmi rozšírené konštrukcie tzv. **stupňovitých (Step Index (SI)) optických vlákien**. **Jadro** optického vlákna s polomerom  $a$  má index lomu  $n_1$  a je obklopené **plášťom** a nižším indexom lomu  $n_2$ . Pre **jednovidové optické vlákna** s malým rozdielom indexov lomu jadra a plášťa je **priemer jadra** 2 až 10  $\mu\text{m}$ , typická hodnota  $\sim 5\mu\text{m}$ . Pre **mnohovidové optické vlákna** je **priemer jadra väčšinou nad 40  $\mu\text{m}$** . Pretože elektromagnetické pole vedenej vlny v plášti klesá exponenciálne so vzdialenosťou od jadra, je na vonkajšom povrchu plášťa zanedbateľné. Optické vlákno môže byť pokryté ďalšou vrstvou (**obalom**) bez toho, aby boli ovplyvnené jeho prenosové vlastnosti. Do tejto skupiny patrí aj z výrobného hľadiska jednoduché **PCS vlákno**, tvorené z kremenného alebo skleneného jadra a plastového (silikónového) plášťa s vhodnými optickými vlastnosťami. Podobné vlastnosti má aj optické vlákno (**obr. 2.1 d**) tvorené trubičkou s indexom lomu  $n_1$ , zaplnenou a pokrytou vhodným materiálom s indexom lomu  $n_2$ . Na **obr. 2.1 e** je znázornené **gradientné (GI) mnohovidové optické vlákno**, ktoré má spojitý priebeh indexu lomu (najčastejšie parabolický) s maximom v osi vlákna. Optické vlákno na **obr. 2.1 f** je zaujímavé tým, že je vytvorené z jediného materiálu ( $\text{SiO}_2$ ). Jadro prechádza v tenkú membránu, ktorá zaisťuje jeho súosové umiestnenie v dutom plášti. Pretože elektromagnetické pole v oblasti membrány exponenciálne klesá, je pri vhodných rozmeroch na vnútorných stenách plášťa už zanedbateľné a plášť môže byť z rovnakého materiálu ako jadro a nosná membrána. Optické vlákno tohto typu môže byť **jednovidové** alebo **mnohovidové** a možno preň dosiahnuť veľmi malé tlmenie.



Obr. 2.1  
Profily indexu lomu najčastejšie  
používaných optických vlákien.

Pre **telekomunikačné** účely sa v súčasnosti používajú tri typy vlákien (**obr. 2.2**):

- mnohovidové vlákna** so skokovitým (stupňovitým) profilom indexu lomu, tzv. **stupňovité optické vlákna (SI-MM z angl. Step Index MultiMode)**,
- mnohovidové vlákna** so spojítym (gradientným) profilom indexu lomu, tzv. **gradientné optické vlákna (GI-MM z angl. Graded Index MultiMode)**,
- jednovidové vlákna** so skokovitým (stupňovitým) profilom indexu lomu, tzv. **stupňovité optické vlákna (SI-SM z angl. Step Index SingleMode)**.

Okrem jednoduchých jednovidových vlákien so stupňovitým profilom indexu lomu sa využívajú aj iné typy jednovidových vlákien (**obr. 2.3**), pre ktoré sa dosahujú lepšie prenosové vlastnosti.

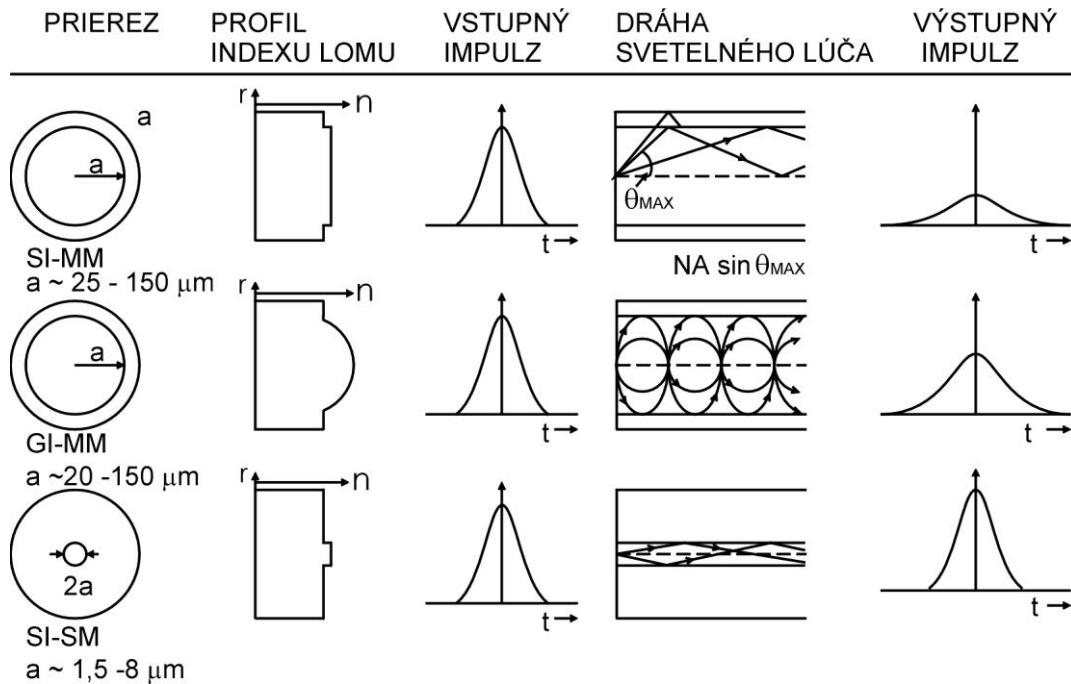
Medzi **planárne optické vlnovody** zahrňujeme také vlnovody, ktorých štruktúra je vytvorená na rovinatej podložke zo základného materiálu. Planárne optické vlnovody s najrôznejšou štruktúrou sú základom mnohých prvkov **integrovanej optiky**.

Najjednoduchšou planárnou vlnovodovou štruktúrou je homogénna dielektrická platňa (vrstva). Mechanizmus vedenia svetelnej vlny je založený na **totálnom odraze** na rozhraní medzi povrchom vrstvy a okolím. Používajú sa tiež nehomogénne vrstvy (t.j. vrstvy s gradientným profilom indexu lomu). Tu je vlnovodový jav spôsobený **ohybom** svetelnej vlny. Najčastejšie je planárny optický vlnovod realizovaný nanosením vhodnej vrstvy na planárnu podložku (t. j. substrát z vhodného optického materiálu), alebo vytvorením vlnovodovej vrstvy priamo v podložke difúznou metódou.

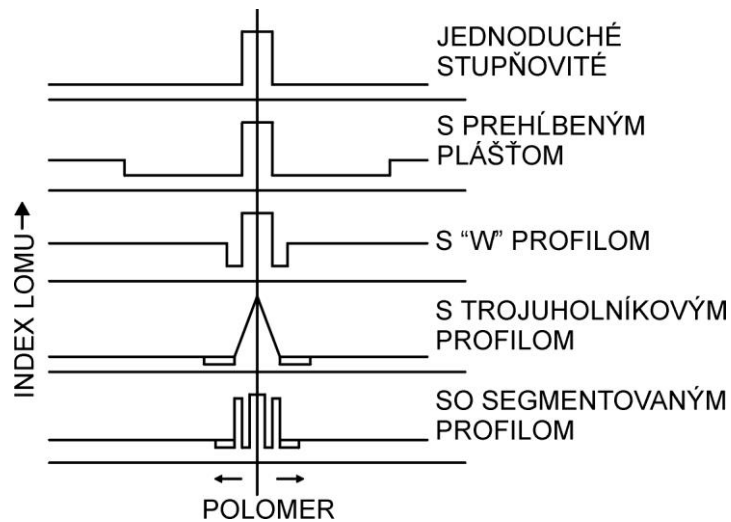
Pokiaľ nie je šíriaca sa vlna v jednom z priečných rozmerov ohraničená, nazýva sa takýto vlnovod dvojrozmerným. Rozloženie elektromagnetického poľa v takýchto vlnovodových štruktúrach je funkciou dvoch premenných, jednej priečnej a jednej pozdĺžnej vzhľadom na smer šírenia.

Ak planárna vlnovodová štruktúra ohraničuje priestorove vlnu v oboch priečných rozmeroch, potom vlnovod nazývame trojrozmerným. Príkladmi trojrozmerných vlnovodov sú **vlnovody pásikové**

alebo kanálové (obr. 2.4). Vlnodový pásik alebo kanál je nanosený na planárnej podložke z optického materiálu, alebo je vytvorený difúziou priamo v podložke. Podmienkou vzniku vlnodového javu je väčšia hodnota indexu lomu  $n_1$  pásika, resp. kanálu, ako index lomu okolia  $n_2$ .

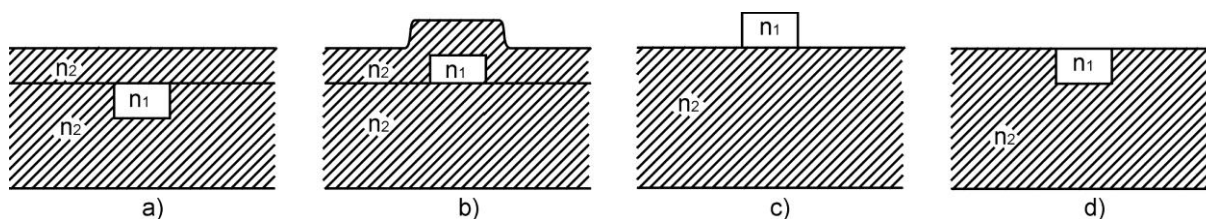


Obr. 2.2  
Najčastejšie používané telekomunikačné optické vlákna.



Obr. 2.3  
Profily indexu lomu jednovládových optických vlákien.

Aplikácie planárnych optických vlnodov kladú rôzne požiadavky na ich vlastnosti. Z hľadiska konštrukcie optických integrovaných obvodov sú najdôležitejšími charakteristikami: počet vedených vidov, spektrum vidov, rozloženie elektromagnetického poľa a rozloženie energie vedenej vlny v priečnom reze vlnodov. Vzhľadom na veľmi malú dĺžku týchto vlnodov (niekoľko cm) nehrá disperzia signálu tak dôležitú úlohu, ako pre optické vlákna.



Obr. 2.4  
Priečny rez niektorých planárnych optických vlnovodov.

## 2.2 ZÁKLADNÉ POJMY VLNOVEJ A LÚČOVEJ TEÓRIE ŠÍRENIA SVETLA

### 2.2.1 VLNOVÁ ROVNICA

Vlnová teória šírenia svetla v optických vlnovodoch vychádza z riešenia Maxwellových rovníc s príslušnými okrajovými podmienkami. **Maxwellove rovnice** v dielektrickom prostredí ( $\sigma = 0$ ) bez zdrojov majú tvar

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.2.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2.2.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (2.2.4)$$

kde  $\vec{E}$  je **vektor intenzity elektrického poľa**,  $\vec{H}$  je **vektor intenzity magnetického poľa**,  $\vec{D}$  je **vektor elektrickej indukcie** a  $\vec{B}$  je **vektor magnetickej indukcie**. Tieto štyri vektory sú v lineárnom a izotropnom prostredí navzájom zviazané tzv. **materiálovými vzťahmi**

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (2.2.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.2.6)$$

Pre harmonickú časovú závislosť vektorov elektromagnetického poľa po zavedení komplexnej reprezentácie harmonických veličín z Maxwellových rovníc (2.2.1) a (2.2.2) dostaneme **Helmholtzove vlnové rovnice** pre fázory  $\vec{E}$  a  $\vec{H}$  v tvare

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (2.2.7)$$

$$\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad (2.2.8)$$

kde

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \quad (2.2.9)$$

je **vlnové číslo**.

Každá zložka fázorov  $\vec{E}$  a  $\vec{H}$  v kartézskej, resp. valcovej súradnicovej sústave je riešením **skalárnej vlnovej rovnice**

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0 \quad (2.2.10)$$

kde pre planárne vlnovody uvažujeme **Laplaceov operátor v kartézskej súradnicovej sústave**

$$\Delta \psi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2.2.11)$$

a pre optické vlákna (t.j. valcové vlnovody) uvažujeme **Laplaceov operátor vo valcovej súradnicovej sústave**

$$\Delta \psi(r, \varphi, z) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2.2.12)$$

### 2.2.2 ŠÍRENIE VÝKONU

Výkon  $P$  prenesený vlnovodom možno vypočítať integráciou **Poyntingovho vektora** cez prierez vlnovodu

$$P = \int_A \operatorname{Re} \{ \vec{S} \} dA \quad (2.2.13)$$

kde

$$\vec{S} = \frac{1}{2} [\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H} \quad (2.2.14)$$

je **komplexný Poyntingov vektor** a  $[\vec{E}, \vec{H}^*]$  označuje vektorový súčin vektorov  $\vec{E}$  a  $\vec{H}^*$ .

### 2.2.3 ROVNICA EIKONALU

Vyšetrovanie šírenia svetla v optických vlnovodoch vedie k problému šírenia svetla v priestorovo nehomogénnom prostredí, t. j. v prostredí, kde index lomu je funkciou súradníc  $n = n(x, y, z)$ . Sú známe dva prístupy k riešeniu tohto problému: Po prvé je to vyšetrovanie **dráhy svetelného lúča** v tomto prostredí. Tento prístup sa nazýva **geometrická optika**. Po druhé je to **riešenie Maxwellových rovníc** (resp. vlnovej rovnice), tzv. **vlnová teória šírenia svetla** v uvažovanom prostredí.

Geometrickú optiku možno použiť len v tých prípadoch, keď priemer zväzku je omnoho väčší ako vlnová dĺžka svetla. Zväzok, ktorý má priemer porovnateľný s vlnovou dĺžkou, nemôže byť uvažovaný ako lúč, pretože takýto zväzok vzhľadom na **jav difrakcie** vykazuje silnú divergenciu, čo je jav mimo geometrickej optiky. Na druhej strane, ak je priemer zväzku omnoho väčší ako vlnová dĺžka svetla, možno z Maxwellových rovníc odvodiť približnú vlnovú rovnicu na výpočet dráhy lúča. Skalárna premenná použitá v tejto rovnici na vyjadrenie fázy vlnoplochy sa nazýva „**eikonal**“ a rovnica sa nazýva „**rovnica eikonalu**“. Odvodíme rovnicu eikonalu.

Uvažujeme šírenie uniformnej rovinatej vlny v smere  $\vec{s}_0$  v homogénom prostredí s indexom lomu  $n$ . Potom fázory  $\vec{E}$  a  $\vec{H}$  intenzity elektrického a magnetického poľa ako funkcie polohového vektora sú

$$\vec{E} = \vec{e} e^{-jk_0 n(\vec{s}_0, \vec{r})} \quad (2.2.15)$$

$$\vec{H} = \vec{h} e^{-jk_0 n(\vec{s}_0, \vec{r})} \quad (2.2.16)$$

kde  $\vec{e}$  a  $\vec{h}$  sú  $\vec{E}$  a  $\vec{H}$  v počiatku (t. j. pre  $\vec{r} = 0$ ) a  $k_0$  je vlnové číslo vákuu.

Ak v ďalšom uvažujeme, že index lomu  $n$  je funkciou polohového vektora  $\vec{r}$ , potom  $\vec{E}$  a  $\vec{H}$  môžeme vyjadriť v podobnom tvare ako predošlé vzťahy

$$\vec{E} = \vec{e}(\vec{r}) e^{-jk_0 \phi(\vec{r})} \quad (2.2.17)$$

$$\vec{H} = \vec{h}(\vec{r}) e^{-jk_0 \phi(\vec{r})} \quad (2.2.18)$$

V týchto vzťahoch je  $\phi(\vec{r})$  reálna skalárna funkcia, ktorá vyjadruje fázu v bode  $\vec{r}$ . Táto funkcia sa nazýva „eikonal“ alebo niekedy „optická dráha“. Funkcie  $\vec{e}(\vec{r})$  a  $\vec{h}(\vec{r})$  sú vektorové reálne funkcie polohového vektora  $\vec{r}$ .

Najprv ukážeme, že ak  $k$  je veľmi veľké, t. j. ak uvažovaný priestor je omnoho väčší ako vlnová dĺžka, môžeme získať diferenciálnu rovnicu len pre veličinu  $\phi$ , nezávislú od  $\vec{e}$  a  $\vec{h}$ . Aplikáciou operácie rotácie na rovnice (2.2.17) a (2.2.18) dostaneme

$$\text{rot } \vec{E} = (\text{rot } \vec{e} - jk_0 [\text{grad } \phi, \vec{e}]) e^{-jk_0 \phi} \quad (2.2.19)$$

$$\text{rot } \vec{H} = (\text{rot } \vec{h} - jk_0 [\text{grad } \phi, \vec{h}]) e^{-jk_0 \phi} \quad (2.2.20)$$

Vektory  $\vec{E}$  a  $\vec{H}$  však musia vyhovovať aj Maxwellovým rovniciam (2.1.1) a (2.1.2). Po dosadení z rovníc (2.2.17) a (2.2.18) dostaneme

$$\text{rot } \vec{E} = -jk_0 c \mu \vec{H} = -jk_0 c \mu \vec{h} e^{-jk_0 \phi} \quad (2.2.21)$$

$$\text{rot } \vec{H} = jk_0 c \varepsilon \vec{E} = jk_0 c \varepsilon \vec{e} e^{-jk_0 \phi} \quad (2.2.22)$$

kde  $c$  je rýchlosť svetla vo vákuu. Porovnaním rovnice (2.2.21) s (2.2.19) a (2.2.22) s (2.2.20) dostaneme

$$[\text{grad } \phi, \vec{e}] - c \mu \vec{h} = \frac{1}{jk_0} \text{rot } \vec{e} \quad (2.2.23)$$

$$[\text{grad } \phi, \vec{h}] + c \varepsilon \vec{e} = \frac{1}{jk_0} \text{rot } \vec{h} \quad (2.2.24)$$

Predpokladajme, že uvažovaný priestor (priemer zväzku) a polomer zakrivenia lúča sú omnoho väčšie, ako vlnová dĺžka. Potom môžeme považovať vlnovú dĺžku za extrémne malú (alebo frekvenciu za veľmi veľkú), t. j. vlnové číslo  $k_0 = \omega / c = 2\pi / \lambda$  rastie nad všetky medze. Teda pravé strany rovníc (2.2.23) a (2.2.24) možno položiť nule

$$[\text{grad } \phi, \vec{e}^{\rho}] - c\mu \vec{h}^{\nu} = 0 \quad (2.2.25)$$

$$[\text{grad } \phi, \vec{h}^{\nu}] + c\varepsilon \vec{e}^{\rho} = 0 \quad (2.2.26)$$

Tieto rovnice určujú vzťahy medzi smermi vektorov  $\text{grad } \phi$ ,  $\vec{e}^{\rho}$  a  $\vec{h}^{\nu}$ . Je evidentné, že tieto vektory tvoria trojicu navzájom kolmých vektorov, preto

$$(\vec{e}^{\rho}, \text{grad } \phi) = 0 \quad (2.2.27)$$

$$(\vec{h}^{\nu}, \text{grad } \phi) = 0 \quad (2.2.28)$$

Vylúčením  $\vec{h}^{\nu}$  z rovníc (2.2.25), (2.2.26) po úprave dostaneme

$$\frac{1}{c\mu} [(\vec{e}^{\rho}, \text{grad } \phi) \text{grad } \phi - \vec{e}^{\rho} (\text{grad } \phi)^2] + c\varepsilon \vec{e}^{\rho} = 0 \quad (2.2.29)$$

čo možno použitím vzťahu (2.2.27) zjednodušiť na

$$(\text{grad } \phi)^2 = (\nabla \phi)^2 = c^2 \varepsilon \mu = n^2 \quad (2.2.30)$$

V kartézskej súradnicovej sústave teda platí

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z) \quad (2.2.31)$$

Toto je rovnica, ktorá určuje eikonalu. Ako ukážeme v nasledujúcom odstavci, plocha, na ktorej je

$$\phi(\vec{r}) = \text{konšt.}, \quad (2.2.32)$$

zodpovedá vlnoploche svetla a dráha lúča, je určená krivkou, ktorá kolmo pretína vlnoplochu. Rovnicu (2.2.30) nazývame „**rovnica eikonalu**“. Toto je základná rovnica geometrickej optiky nehomogénnych prostredí.

## 2.2.4 ROVNICE LÚČA

Z rovnice eikonalu možno odvodiť rovnice, ktoré nazývame **rovniciami lúča**. Hustota toku výkonu pozdĺž svetelného zväzku je určená reálnou časťou komplexného Poyntingovho vektora

$$\vec{S}^{\rho} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} [\vec{E}^{\rho}, \vec{H}^{\rho*}] \right\} \quad (2.2.33)$$

Dosadením zo vzťahov (2.2.17) a (2.2.18) dostaneme

$$\vec{S}^{\rho} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} [\vec{e}^{\rho}, \vec{h}^{\rho*}] \right\} \quad (2.2.34)$$

z čoho použitím (2.2.25) po úprave dostaneme

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2c\mu} \operatorname{Re} \left\{ \left( \frac{\rho}{\epsilon}, \frac{\rho^*}{\epsilon^*} \right) \operatorname{grad} \phi - \left( \frac{\rho}{\epsilon}, \operatorname{grad} \phi \right) \frac{\rho^*}{\epsilon^*} \right\} \quad (2.2.35)$$

Vzhľadom na (2.2.27) je však druhý člen v zloženej zátvorke nulový, z čoho

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2c\mu} \operatorname{Re} \left\{ \left( \frac{\rho}{\epsilon}, \frac{\rho^*}{\epsilon^*} \right) \operatorname{grad} \phi \right\} = \frac{\left( \frac{\rho}{\epsilon}, \frac{\rho^*}{\epsilon^*} \right)}{2c\mu} \operatorname{grad} \phi \quad (2.2.36)$$

Pretože  $\left( \frac{\rho}{\epsilon}, \frac{\rho^*}{\epsilon^*} \right)$  v tejto rovnici je reálna skalárna veličina úmerná strednej hodnote energie elektrického poľa, určuje táto rovnica smer toku energie, t.j. smer lúča zodpovedá smeru gradientu eikonalu ( $\operatorname{grad} \phi$ ). Z rovnice eikonalu dostaneme

$$|\operatorname{grad} \phi| = |\nabla \phi| = n \quad (2.2.37)$$

Teda jednotkový vektor v smere lúča  $\mathcal{S}_0$  možno vyjadriť v tvare

$$\mathcal{S}_0 = \frac{\operatorname{grad} \phi}{|\operatorname{grad} \phi|} = \frac{\operatorname{grad} \phi}{n} = \frac{\nabla \phi}{n} \quad (2.2.38)$$

Iné vyjadrenie lúča možno získať použitím krivočiarej súradnice s určenej dráhou pozdĺž lúča. Teda platí

$$\frac{d\mathcal{r}^p}{ds} = \mathcal{S}_0 \quad (2.2.39)$$

potom rovnica (2.2.38) môže byť zapísaná v tvare

$$n(x, y, z) \frac{d\mathcal{r}^p}{ds} = \operatorname{grad} \phi \quad (2.2.40)$$

Po úprave možno túto rovnicu zapísať v častejšie používanom tvare

$$\frac{d}{ds} \left[ n(x, y, z) \mathcal{S}_0 \right] = \operatorname{grad} n \quad (2.2.41)$$

alebo

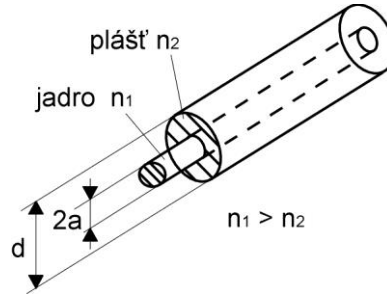
$$\frac{d}{ds} \left[ n(x, y, z) \frac{d\mathcal{r}^p}{ds} \right] = \operatorname{grad} n \quad (2.2.42)$$

Tieto rovnice sa nazývajú **rovniciami lúča**. Sú to základné rovnice na určenie dráhy lúča v nehomogénnom prostredí.

### 2.3 LÚČOVÁ TEÓRIA ŠÍRENIA SVETLA V STUPŇOVITOM OPTICKOM VLÁKNE

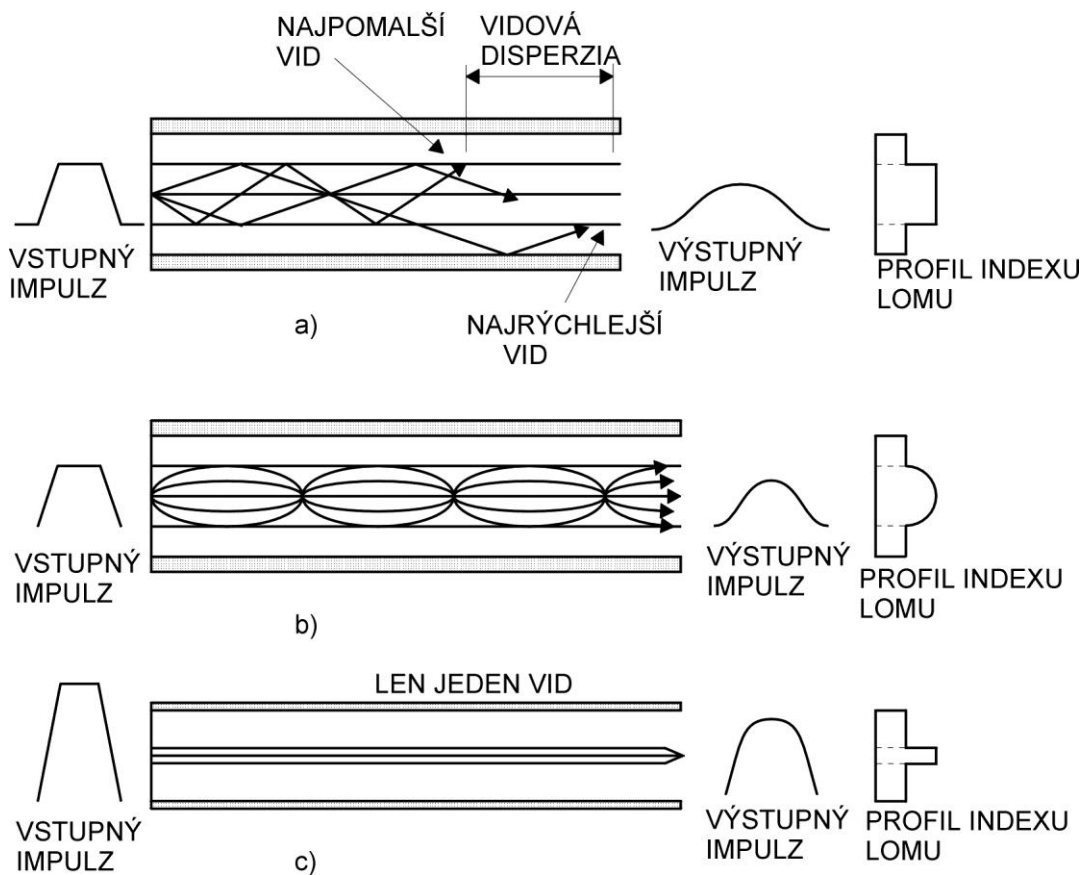
Najjednoduchší typ optického vlákna je sklené homogénne vlákno tvorené jadrom a plášťom v tvare súosových valcov (**obr. 2.5**). Materiál jadra je väčšinou kremeň alebo viaczložkové sklo s vysokou chemickou čistotou. Plášť obklopujúce jadro môže byť ľubovoľné bezstratové dielektrikum





Obr. 2.5  
Stupňovité mnohovidové optické vlákno.

s indexom lomu menším ako je index lomu jadra. Elektromagnetická energia šíriaca sa vláknom je väčšinou sústredená v jadre. Základným mechanizmom šírenia svetla v optickom vlákne je totálny odraz na rozhraní jadro - plášť. Elektromagnetická energia sa šíri pozdĺž vlákna v tvare vidov, ktoré opisujú matematicky a fyzikálne možné konfigurácie elektromagnetického poľa šíriacej sa svetelnej vlny. Presná vidová predstava o šírení svetelnej vlny optickým vláknom vyplýva z riešenia Maxwellových rovníc. Lúče jednotlivých vidov elektromagnetickej energie postupujú vláknom po rôznych dráhach. V priblížení lúčovej teórie šírenia svetla (v priblížení geometrickej optiky) môžeme za rôzne vidy považovať jednoducho tieto rôzne skupiny dráh šírenia sa svetelnej vlny, ako je to znázornené na **obr. 2.6**.



Obr. 2.6  
Šírenie vidov v SI-MM (a), GI-MM (b) a SI-SM (c) vlákne  
z hľadiska geometrickej optiky.

Jemné fluktuácie indexu lomu jadra alebo plášťa optického vlákna môžu zväčšiť chybu, vnášanú lúčovou teóriou šírenia svetla. Musíme si preto uvedomiť, že lúčová teória:

- môže byť použitá na analýzu mnohovidových stupňovitých optických vlákien s relatívne dobrou presnosťou,
- môže byť použitá na analýzu tenkých mnohovidových gradientných optických vlákien, ale vnášaná chyba môže byť veľká,
- nemôže byť použitá na analýzu jednovidových vlákien.

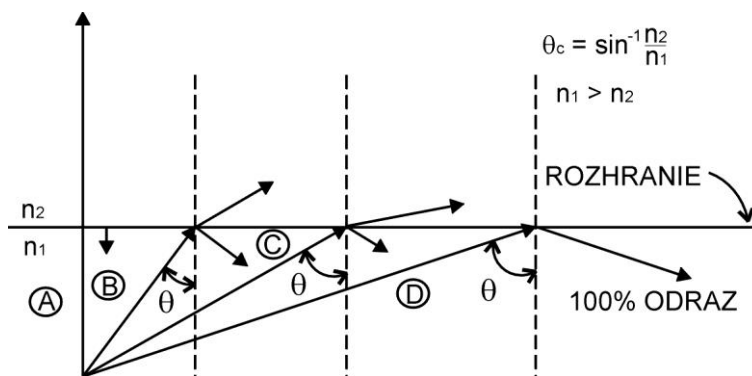
Vzhľadom na ohraničenia (b) a (c) je teda štandardnou metódou analýzy optických vlákien vlnová teória s využitím riešenia Maxwellových rovníc. Použitie lúčovej teórie má však výhody v jednoduchosti a omnoho väčšej fyzikálnej názornosti.

### 2.3.1 KLASIFIKÁCIA LÚČOV

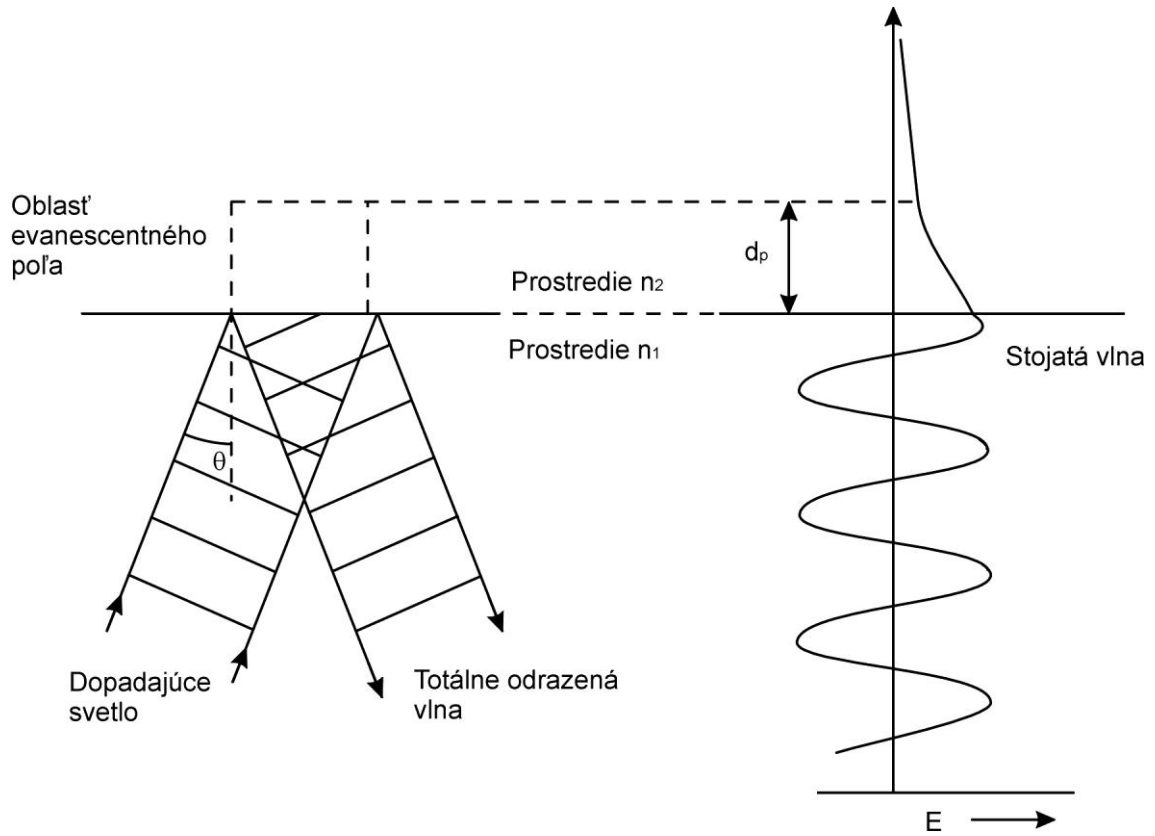
Uvažujme **SI-MM** vlákno s homogénnym jadrom s polomerom  $a$ . Nech index lomu jadra je  $n_1$  a index lomu plášťa je  $n_2$ , pričom  $n_2 < n_1$ . Svetelné lúče šíriace sa jadrom môžu dopadať na rozhranie jadro – plášť SI-MM vlákna (**obr. 2.7**) pod rôznym uhlom. Vo vlákne sa môžu šíriť len také lúče, pre ktoré je uhol dopadu  $\theta > \theta_c$  (kde  $\theta_c$  je určené vzťahom (1.3.4)). V praxi je  $n_1 = 1,48$  a  $n_2 = 1,46$ , preto  $\theta_c = 80,6^\circ$ . Pri splnení podmienky totálneho odrazu na rozhraní jadro – plášť sa tieto lúče môžu šíriť postupnými odrazmi. Pripomeňme (**obr. 2.8**), že pri totálnom odraze vzniká v opticky redšom prostredí **evanescentná** (exponenciálne zanikajúca) **vlna**. Naproti tomu v opticky hustejšom prostredí vzniká stojatá vlna. Evanescentná vlna efektívne preniká do prostredia s indexom lomu  $n_2$  len do istej hĺbky, ktorá sa nazýva hĺbkou vniku  $d_p$  a je úmerná dĺžke vlny  $\lambda_2$  v tomto prostredí. Ak zohľadníme tento jav potom efektívne totálny odraz vzniká v zmysle **obr. 2.9** a pri uvážení odrazu na rozhraní je potrebné počítať s tzv. **Goosovým – Hänchenovým fázovým posunom**.

Lúče, šíriace sa v (SI - MM) optickom vlákne, môžeme klasifikovať do dvoch tried:

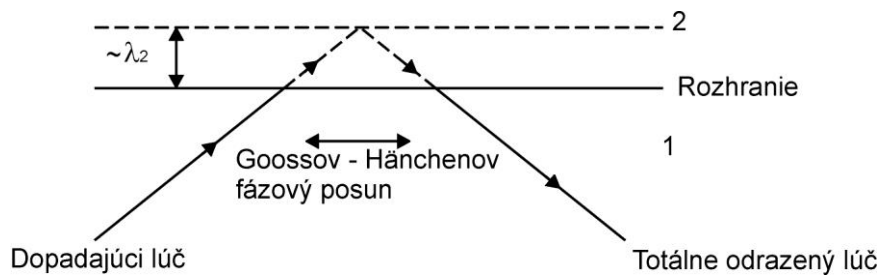
- Meridionálne lúče**, ktoré sa šíria v rovinách prechádzajúcich cez os vlákna (**obr. 2.10**). Lúče pretínajú dvakrát os vlákna počas periódy odrazov.
- Šikmé (kosé) lúče**, ktoré neprechádzajú cez os vlákna (**obr. 2.11**) a šíria sa po špirálovej dráhe.



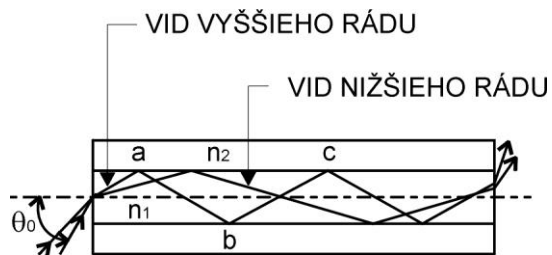
Obr. 2.7  
Úplný odraz na rozhraní jadro – plášť.



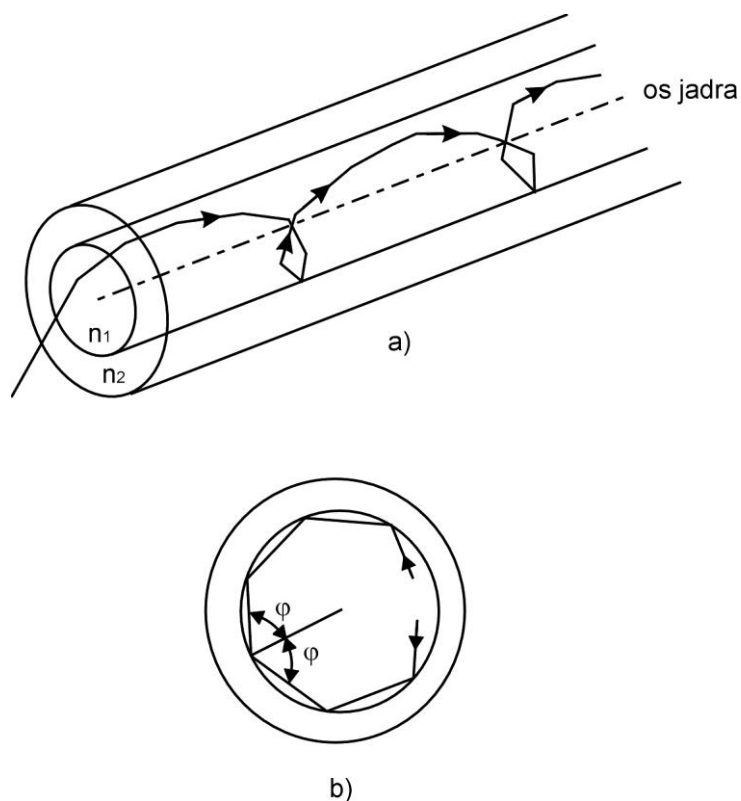
Obr. 2.8  
Vznik evanescentnej vlny pri totálnom odraze.



Obr.2.9  
Goosov – Hänchenov fázový posun  
pri totálnom odraze.



Obr. 2.10  
Šírenie meridiálnych lúčov.



Obr. 2.11

Špirálová dráha šikmých lúčov v SI – MM vlákne (a)  
a jej priečna projekcia (b).

### 2.3.2 ANALÝZA MERIDIONÁLNYCH LÚČOV

Ak je splnená podmienka, že fáza rovinnnej vlny na dráhe a-b-c (**obr. 2.10**), t.j. po dvoch odrazoch, sa zmení o celý násobok  $2\pi$ , potom dochádza ku konštruktívnej interferencii týchto rovinných TEM vln a vznikajú tak vedené vidy. K celkovému posunu fázy na dráhe a-b-c je potrebné pripočítať aj zmenu fázy vlny v mieste odrazov na rozhraní jadro – plášť. Pri prechode vláknom môže byť každý lúč – skupina vidov odrazený niekoľko sto alebo tisíc-krát. Lúče, odrazené pri väčších uhloch (tzv. vyššie vidy), musia prejsť väčšiu dráhu, ako lúče odrazené pri menších uhloch (tzv. nižšie vidy), aby dosiahli koniec vlákna. Dochádza tak ku skresleniu vstupného signálu vplyvom tzv. **vidovej disperzie** (**obr. 2.6a**).

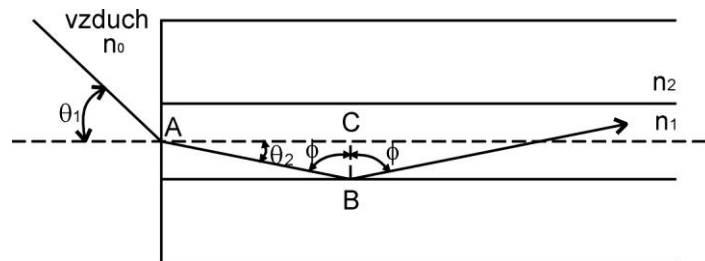
Svetelné lúče môžu dopadať na povrch konca optického vlákna pod rôznymi uhlami  $\theta_1$  (**obr. 2.12**). Ak uvažujeme, že povrch konca vlákna je kolmý na os vlákna, potom zo Snellovho zákona dostaneme

$$n_0 \sin\theta_1 = n_1 \sin\theta_2 \quad (2.3.1)$$

kde  $n_0$  je index lomu prostredia obklopujúceho vlákno (najčastejšie vzduch). Pre uhol dopadu lúča  $\phi$  na rozhranie jadro – plášť, platí

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta_2 \quad (2.3.2)$$

teda vzťah (2.3.1) píšeme v tvare



Obr. 2.12  
Dráha meridiálneho lúča.

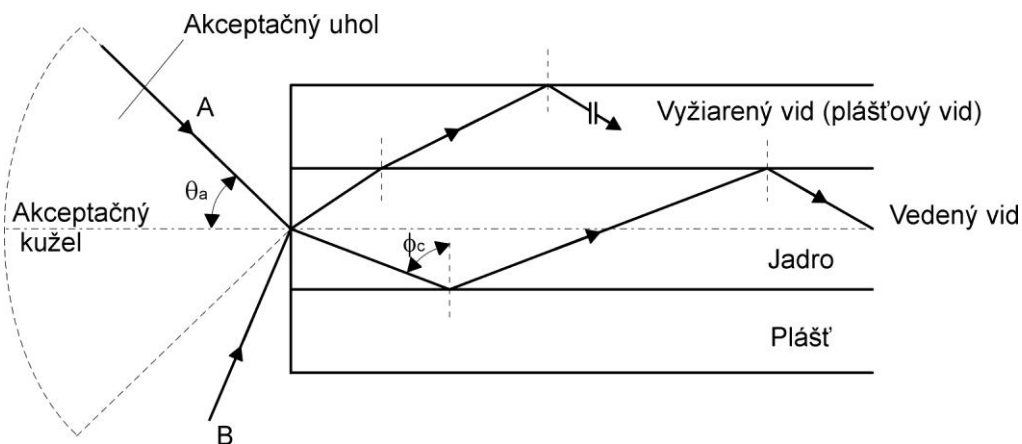
$$n_0 \sin \theta_1 = n_1 \cos \phi = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \quad (2.3.3)$$

kde sme použili trigonometrický vzťah  $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ .

V limitnom prípade pre totálny vnútorný odraz platí  $\phi = \theta_c$ , t.j. uhol sa rovná kritickému uhlu. Potom uhol  $\theta_1 = \theta_a$ , nazývame **akceptačným uhlom optického vlákna**. Zo vzťahu (2.3.3) a (1.3.4) dostaneme

$$n_0 \sin \theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (2.3.4)$$

Akceptačný uhol  $\theta_a$  určuje tzv. **akceptačný kužel optického vlákna** (obr. 2.13). Lúče dopadajúce vo vnútri akceptačného kužela spĺňajú podmienku totálneho odrazu na rozhraní jadro – plášť optického vlákna a môžu sa šíriť pozdĺž vlákna, t.j. tvoria tzv. **vedené vidy**. Lúče z oblasti mimo akceptačného kužela, t.j. meridiálne lúče (vidy), ktoré dopadajú na čelnú plochu optického vlákna po uhlom  $\theta > \theta_a$ , tvoria tzv. **radiálne vidy**, ktoré sú vyžiarené na krátkom úseku optického vlákna. Uhol  $\theta_a$  nazývame tiež maximálnym alebo totálnym akceptačným uhlom. V optickom vlákne môžu vzniknúť tiež tzv. **plášťové vidy** pri splnení podmienky totálneho odrazu na rozhraní plášť – obal.



Obr. 2.13  
Akceptačný kužel optického vlákna.

### 2.3.3 NUMERICKÁ APERTÚRA

Dôležitým parametrom optického vlákna je tzv. **numerická (číselná) apertúra (NA)** definovaná vzťahom

$$NA = n_0 \sin \theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (2.3.5)$$

kde  $n_0$  je index lomu prostredia obklopujúceho optické vlákno. Často sa optické vlákno používa vo vzduchu, potom  $n_0 \cong 1$  a  $NA = \sin\theta_a$ . Pripomeňme, že meridionálne lúče dopadajúce pod uhlom  $\theta_1$  z intervalu  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_a$  sa šíria optickým vláknom.

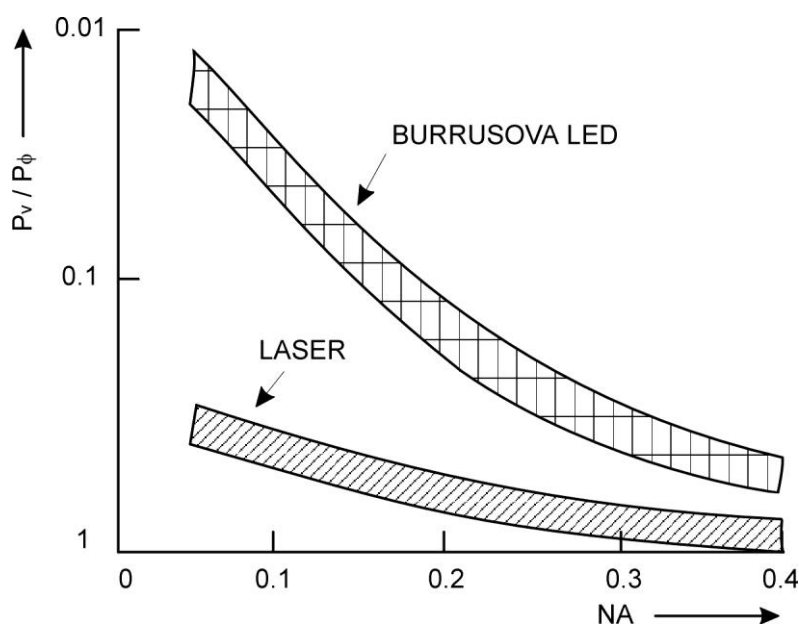
NA možno vyjadriť aj pomocou relatívneho rozdielu indexu lomu jadra a plášťa  $\Delta$ , definovaného vzťahom

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \cong \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad \text{pre } \Delta \ll 1 \quad (2.3.6)$$

Potom platí

$$NA \cong n_1 \sqrt{2\Delta} \quad (2.3.7)$$

NA určená podľa vzťahov (2.3.5) a (2.3.7) je efektívnou mierou naviazania optického výkonu  $P_v$  do optického vlákna. Čím je väčšia hodnota NA (**obr. 2.14**), tým je vyššia účinnosť naviazania výkonu zdroja svetla  $P_\phi$  do jadra optického vlákna a tým sú menšie aj požiadavky na smerovosť vyžarovacej charakteristiky zdroja svetla. Vzťahy (2.3.5) a (2.3.7) nezávisia od priemeru jadra OV a platia do priemeru jadra OV  $\sim 8\mu\text{m}$ , kde už prestávajú platiť podmienky použitia priblíženia geometrickej optiky.



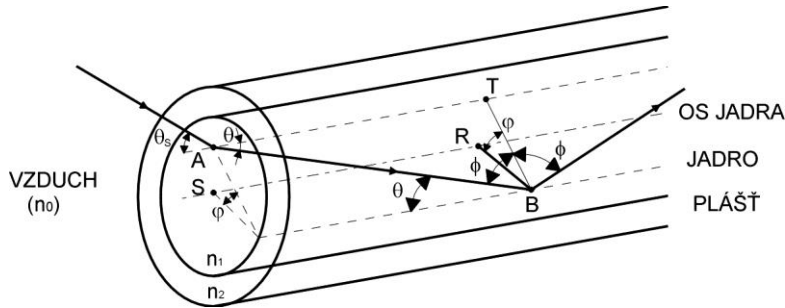
Obr. 2.14  
Závislosť účinnosti naviazania svetla  
do optického vlákna od NA.

### 2.3.4 ANALÝZA ŠIKMÝCH LÚČOV

V OV sa môžu šíriť aj také vidy (**obr. 2.11**), ktoré neprechádzajú cez os OV. Tieto vidy sa šíria po špirálovej dráhe a nazývajú sa **šikmými (kosými) vidmi**. Z **obr. 2.11** vidíme, že špirálová dráha šikmého vidu zmení pri každom odraze smer o  $2\varphi$ , kde  $\varphi$  je uhol medzi projekciou dráhy lúča do roviny kolmej na os OV a priamkou prechádzajúcou bodom dopadu a osou OV. Teda bod a smer výstupu šikmých lúčov z OV do okolitého prostredia závisí predovšetkým od počtu odrazov v OV, ako aj od podmienok jeho vstupu do OV. Ak je vstupné svetlo rozložené nerovnomerne, budú mať šikmé

lúče tendenciu vyhladiť rozloženie tohto svetla, t.j. jeho distribúcia bude po prechode cez OV rovnomernejšia. Miera vyhladenia závisí od počtu odrazov na rozhraní jadro – plášť OV.

Na výpočet akceptačného uhla pre šikmé lúče je nutné definovať smer dopadajúceho lúča v dvoch navzájom kolmých rovinách. Na obr. 2.15 je znázornená dráha šikmého lúča, dopadajúceho do bodu A pod uhlom  $\theta_s$ . Lúč sa láme na rozhraní vzduch – jadro a dopadá do bodu B. Uhol dopadu a odrazu  $\phi$  v bode B je väčší ako kritický uhol  $\theta_c$  pre rozhranie jadro - plášť. Zložka lúča medzi bodmi AB v smere polomeru jadra OV je úmerná  $\cos\phi$ . Označme  $\varphi$  uhol medzi polomerom jadra v bode B a projekciou lúča AB do roviny BRT kolmej na os OV. Nech  $\theta$  je uhol medzi lúčom AB a priamkou AT



Obr. 2.15

Dráha šikmého lúča dopadajúceho pod uhlom  $\theta_s$ .

rovnobežnou s osou OV. Potom rozklad lúča AB vzhľadom na polomer BR do uvažovaných dvoch navzájom kolmých rovín vyžaduje násobenie  $\cos\phi$  a  $\cos\theta$ . Preto pre odraz v bode B platí

$$\cos\phi \cos\theta = \cos\phi \quad (2.3.8)$$

z čoho použitím trigonometrického vzťahu  $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$  dostaneme

$$\cos\phi \sin\theta = \cos\phi = \sqrt{1 - \sin^2\phi} \quad (2.3.9)$$

V limitnom prípade totálneho odrazu je  $\phi = \theta_c$ , použitím vzťahu (1.3.4) dostaneme

$$\cos\phi \cos\theta \leq \cos\theta_c = \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \quad (2.3.10)$$

Zo Snellovho zákona pre lom v bode A je

$$n_0 \sin\theta_a = n_1 \sin\theta \quad (2.3.11)$$

kde  $\theta_a$  je vstupný axiálny uhol a  $\theta$  je vnútorný axiálny uhol. Dosadením za  $\sin\theta$  z rovnice (2.3.11) do vzťahu (2.3.10) dostaneme v limitnom prípade

$$\sin\theta_{as} = \frac{n_1}{n_0} \frac{\cos\theta_c}{\cos\phi} = \frac{n_1}{n_0 \cos\phi} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \quad (2.3.12)$$

kde  $\theta_{as}$  je maximálny vstupný uhol, alebo akceptačný uhol pre šikmé lúče. Tento vzťah možno pomocou NA písať v tvare

$$n_0 \sin\theta_{as} \cos\phi = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = NA \quad (2.3.13)$$

Porovnaním so vzťahom (2.3.5) vyplýva, že šikmé lúče majú väčšie akceptačné uhly ( v závislosti od hodnoty  $\cos\varphi$ ) ako meridionálne lúče. Pretože pre meridionálne lúče sa  $\cos\varphi$  rovná jednej, potom  $\theta_{as}$  sa rovná  $\theta_a$ . Uhol  $\theta_a$  určuje maximálny vstupný uhol meridionálnych vidov a minimálny vstupný uhol šikmých vidov. Preto šikmé vidy majú tendenciu sa šíriť v oblasti okolo vonkajšieho povrchu jadra OV, t.j. nevyužívajú plne celý objem jadra. Pretože šikmé vidy sú komplementárne k meridionálnym vidom, zvyšujú svetlovodivú kapacitu OV (najmä pre veľké hodnoty NA).

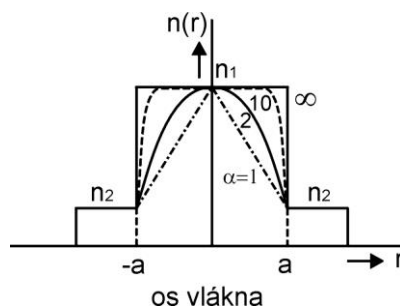
## 2.4 LÚČOVÁ TEÓRIA ŠÍRENIA SVETLA V OPTICKOM VLÁKNE SO SPOJITOU ZMENOU INDEXU LOMU

### 2.4.1 KLASIFIKÁCIA LÚČOV A ZÁKLADNÉ ROVNICE

Pre optické komunikácie sa často používajú OV so spojitou zmenou indexu lomu (tzv. **OV s gradientným profilom indexu lomu (GI)**). Potom priebeh indexu lomu (**obr. 2.16**) v radiálnom smere má závislosť

$$n(r) = \begin{cases} n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a}\right)^\alpha} & \text{pre } r < a \text{ (jadro)} \\ n_1 \sqrt{1 - 2\Delta} & \text{pre } r > a \text{ (plášť')} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

kde  $\alpha$  je parameter (tzv. parameter profilu) a  $\Delta$  je relatívny rozdiel indexov lomu jadra a plášťa. Pre  $\alpha \rightarrow \infty$  dostaneme OV so skokovou zmenou indexu lomu, pre  $\alpha = 1$  dostaneme tzv. trojuholníkový profil, pre  $\alpha = 2$  parabolický profil (najčastejšie používaný v praxi).



Obr. 2.16  
Profil indexu lomu tzv. gradientného OV.

V OV so spojitou zmenou indexu lomu môžu tiež existovať meridionálne a šikmé lúče. Šírenie meridionálnych lúčov si môžeme podľa geometrickej optiky predstaviť (**obr. 2.17**) ako mnohonásobný odraz vedúci k totálnemu odrazu, t.j. k takému zakriveniu dráhy lúča, že je tento vedený v OV. Šikmé lúče sa však nešíria po dráhe typu „cik-cak“, ako je to ukázané na **obr. 2.11**, ale po viac alebo menej deformovanej dráhe (**obr. 2.18a**), alebo skutočne špirálovej dráhe (**obr. 2.18b**). Lúče, ktoré sa šíria v zmysle **obr. 2.18b**, nazývame špirálové lúče.

Analýza dráhy lúčov v OV so spojitou zmenou indexu lomu vychádza z rovnice lúča (2.3.42), ktorá vo valcovej súradnicovej sústave ( $r, \theta, z$ ) má tvar

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dr}{ds} \right) - nr \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \frac{dn}{dr} \quad (2.4.2)$$



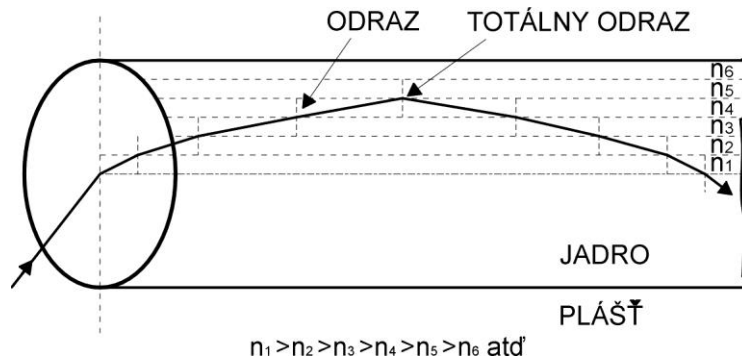
pre zložku  $r$

$$n \left( \frac{dr}{ds} \right) \left( \frac{d\theta}{ds} \right) + \frac{d}{ds} \left( nr \frac{d\theta}{ds} \right) = 0 \quad (2.4.3)$$

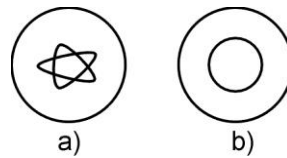
pre zložku  $\theta$

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dz}{ds} \right) = 0 \quad (2.4.4)$$

pre zložku  $z$ , kde uvažujeme, že rozloženie indexu lomu v OV je axiálne symetrické a pozdĺžne homogénne, t.j.  $dn/d\theta = 0$  a  $dn/dz = 0$ .



Obr. 2.17  
Šírenie meridiálneho lúča v OV so spojitým profilom indexu lomu.



Obr. 2.18  
Šírenie šikmých lúčov v OV so spojitým profilom indexu lomu  
(a) lúče s deformovanou dráhou; (b) špirálové lúče.

Rovnicu (2.4.4) možno priamo integrovať, z čoho

$$ds = \frac{n(r)}{n_0 N_0} dz \quad (2.4.5)$$

kde  $N_0$  je smerový cosínus dopadajúceho lúča a  $n_0$  je index lomu v bode dopadu. Vylúčením  $n$  z rovníc (2.4.3) a (2.4.5) dostaneme

$$\frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{dz} + \frac{d}{ds} \left( r \frac{d\theta}{dz} \right) = 0 \quad (2.4.6)$$

čo možno písať v tvare

$$\frac{d}{ds} \left( r^2 \frac{d\theta}{dz} \right) = 0 \quad (2.4.7)$$

Integrovaním tejto rovnice s použitím okrajových podmienok, dostaneme

$$r^2 \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{N_0} (x_0 M_0 - y_0 L_0) \quad (2.4.8)$$

kde  $x_0, y_0$  je bod dopadu a  $N_0, M_0, L_0$  sú smerové kosínusy dopadajúceho lúča.

Podobne použitím vzťahov (2.4.5) a (2.4.8) možno integrovať rovnicu (2.4.2), z čoho dostaneme

$$z = \int_{r_0}^r N_0 \left[ \left( \frac{n(r)}{n_0} \right)^2 + \left( 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right) \right] (x_0 M_0 - y_0 L_0) - N_0^2 \right]^{-1/2} dr \quad (2.4.9)$$

Použitím tohto vzťahu možno vypočítať dráhu ľubovoľného lúča, t.j.  $z$  ako funkciu  $r$ , ak poznáme rozloženie indexu lomu  $n(r)$  a podmienky vstupu lúča, t.j.  $x_0, y_0, L_0, M_0$  (a teda aj  $r_0$  a  $N_0$ ).

## 2.4.2 MERIDIONÁLNE LÚČE

Analýzujeme šírenie meridionálnych lúčov. Bez straty všeobecnosti možno uvažovať  $y_0 = M_0 = 0$  a  $x_0 = r_0$ . Potom rovnica (2.4.9) bude mať jednoduchší tvar

$$z = \int_{r_0}^r N_0 \left[ \left( \frac{n(r)}{n_0} \right)^2 - N_0^2 \right]^{-1/2} dr \quad (2.4.10)$$

Uvažujeme, že profil indexu lomu je kvadratický

$$n^2(r) = n_1^2 \left[ 1 - (\eta r)^2 \right] \quad (2.4.11)$$

kde  $\eta = \sqrt{2\Delta}/a$ . Dosadením z tohto vzťahu do (2.4.10) po integrácii dostaneme

$$r = C \sin \left( \frac{\eta n_1}{n_0 N_0} + \psi \right) \quad (2.4.12)$$

kde

$$C = \eta^{-1} \left[ 1 - N_0^2 \left( 1 - \eta^2 r_0^2 \right) \right]^{1/2} \quad (2.4.13)$$

a  $\psi$  je konštanta. Rovnica (2.4.12) vyjadruje dráhu lúča tvaru vlny s periódou

$$\Lambda = \left( \frac{2\pi N_0}{\eta} \right) \left[ 1 - (\eta r_0)^2 \right]^{1/2} \cong \frac{2\pi}{\eta} \quad (2.4.14)$$

Vidíme, že perióda  $\Lambda$  závisí v prvom priblížení od  $\eta$ , ale aj v menšej miere od vstupných podmienok  $r_0$  a  $N_0$ . Možno ukázať, že  $\Lambda$  je konštantné pre určitý profil indexu lomu

$$n^2(r) = n_1^2 \left[ 1 - (\xi r)^2 + \frac{2}{3} (\xi r)^4 + K \right] = n_1^2 \sec^2 h^2(\xi r) \quad (2.4.15)$$

kde  $\xi = \pi/2C_1$ . Potom aj stredná axiálna rýchlosť lúča je konštantná a nezávisí od vstupných podmienok. Z toho potom vyplýva nulová medzividová disperzia pre meridionálne lúče. Ideálny profil indexu lomu (2.4.15) je blízky (ale sa málo líši) kvadratickému profilu indexu lomu (2.4.11).

### 2.4.3 ŠPIRÁLOVÉ LÚČE

Špirálové lúče predstavujú špeciálny prípad šikmých lúčov (**obr. 2.18**). Ukážeme, že aj pre špirálové lúče existuje profil indexu lomu, ktorý minimalizuje medzividovú disperziu.

Nech špirálové lúče sa šíria na povrchu valca (**obr. 2.19**) s polomerom  $r_0$ , s uhlom stúpania špirály  $\phi$ . Rovnicu lúča (2.3.41) v tomto špeciálnom prípade môžeme písať v tvare

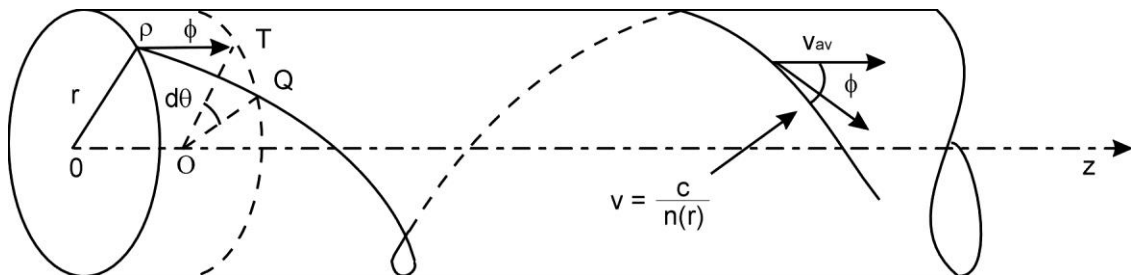
$$n(r) \frac{d\mathbf{s}^p}{dr} = \nabla n(r) \quad (2.4.16)$$

kde  $\mathbf{s}^p$  je jednotkový vektor v smere dráhy. Z **obr. 2.19** pre veľkosť prírastku vektora  $\mathbf{s}^p$  dostaneme

$$|d\mathbf{s}^p| = \sin \phi \, d\theta \quad (2.4.17)$$

ale tiež platí

$$\sin \phi \, ds = TQ = r d\theta \quad (2.4.18)$$



Obr. 2.19  
Dráha špirálového lúča.

Teda z rovníc (2.4.16) až (2.4.18) dostaneme vzťah

$$\frac{n(r) \sin^2 \phi}{r} = - \frac{dn(r)}{dr} \quad (2.4.19)$$

ktorý určuje závislosť medzi polomerom  $r$  špirálovej dráhy a uhlom stúpania  $\phi$ .

Axiálna rýchlosť  $v_z$  je podľa **obr. 2.19** a vzťahu (2.4.19)

$$v_z(r) = \frac{\cos \phi}{n(r)\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{r}{n} \frac{dn}{dr}}}{n\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (2.4.20)$$

Podľa predpokladu má táto rýchlosť byť pozdĺž dráhy lúča konštantná

$$v_z(r) = v_{z0} = \frac{1}{n_1 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (2.4.21)$$

Riešením takto získanej diferenciálnej rovnice

$$\frac{n}{n_1} = \sqrt{1 + \frac{r}{n} \frac{dn}{dr}} \Rightarrow \frac{r}{n} \frac{dn}{dr} - \left(\frac{n}{n_1}\right)^2 + 1 = 0 \quad (2.4.22)$$

dostaneme

$$n^2(r) = \frac{n_1^2}{1 + (\eta r)^2} = n_1^2 \left[ 1 - (\eta r)^2 + (\eta r)^4 - K \right] \quad (2.4.23)$$

Zistili sme, že ak profil indexu lomu vyhovuje rovnici (2.4.23), potom axiálne rýchlosti všetkých špirálových lúčov sú rovnaké, z čoho potom vyplýva nulová medziividová disperzia pre špirálové lúče.

Záverom pripomeňme, že optimálne profily indexov lomu, určené vzťahmi (2.4.15) a (2.4.23), nie sú rovnaké. Z toho ovšem vyplýva, že neexistuje taký optimálny profil indexu lomu, pre ktorý by bola súčasne nulová medziividová disperzia pre meridiálne aj špirálové lúče. Vzťahy (2.4.15) a (2.4.23) sú však rovnaké do druhého členu rozvoja, ktorý je rovnaký ako pre kvadratický profil indexu lomu. Preto v praxi kvadratický profil indexu lomu umožňuje podstatne redukovať medziividovú disperziu. Pripomeňme tiež, že kvadratický priebeh indexu lomu je v praxi ohraničený len na oblasť jadra OV, v plášti je profil indexu lomu konštantný, čo tiež ohraničuje aplikáciu tu vyšetrovaného idealizovaného prípadu.

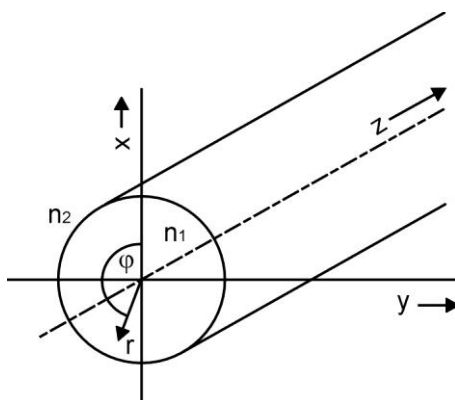
## 2.5 VLNOVÁ TEÓRIA ŠÍRENIA SVETLA V OPTICKOM VLÁKNE SO SKOKOVOU ZMENOU INDEXU LOMU

Vlnová teória šírenia svetla v OV poskytuje exaktnejšie a presnejšie výsledky. Jej fyzikálna interpretácia je však zložitejšia a odvodené vzťahy sú v mnohých prípadoch neriešiteľné v analytickom tvare. Na základe **riešenia Maxwellových rovníc** umožňuje vlnová teória určiť rozloženie elektromagnetického poľa a podmienky šírenia jednotlivých vidov. Podobne ako pri riešení dielektrického valcového vlnovodu dostaneme  $TE_m$  a  $TM_m$  vidy, kde  $l$  a  $m$  sú **vidové čísla**. Tieto vidy zodpovedajú **meridiálnym vidom**. V OV však môžu vzniknúť aj **hybridné vidy**, pre ktoré sú zložky  $E_z$  a  $H_z$  nenulové. Tieto vidy zodpovedajú **šikmým vidom** a označujeme ich  $HE_m$  alebo  $EH_m$ , podľa toho, ktorá zložka poľa (H alebo E) dáva väčší príspevok k priečnej zložke elektromagnetického poľa príslušného hybridného vidu. Preto exaktný popis vidovej štruktúry elektromagnetického poľa OV je veľmi zložitý. Pre OV používané pre komunikačné účely však možno predpokladať, že  $\Delta \ll 1$  (v praxi  $\Delta < 0.03$ , čo zodpovedá zmene indexu lomu o 2 %), potom OV môže prenášať len tzv. **kvázihomogénne vidy**, ktoré sa šíria pod malým uhlom vzhľadom na os OV. Vlny šíriace sa v týchto tzv. **slabovedúcich štruktúrach**, majú len malé pozdĺžne zložky elektromagnetického poľa. Preto môžeme pre ne použiť aproximáciu úplného súboru HE, EH, TE a TM vidov pomocou dvoch lineárne polarizovaných zložiek, tzv. **lineárne polarizovaných (LP) vidov**. Superpozícia týchto degenerovaných vidov, charakterizovaná spoločnou konštantou šírenia, zodpovedá príslušnému LP vidu, tvorenému elektromagnetickým poľom jemu príslušných HE, EH, TE alebo TM vidov. Táto

lineárna kombinácia degenerovaných vidov, získaných z exaktného riešenia, umožňuje podstatne zjednodušiť analýzu slabovedúcich OV.

### 2.5.1 RIEŠENIE VLNOVEJ ROVNICE

Ak uvažujeme OV (obr. 2.20), vychádzame z riešenia Maxwellových rovníc vo valcovej súradnicovej sústave  $(r, \varphi, z)$  pre nemagnetické dielektrikum ( $\mu = \mu_0$  a  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ).



Obr. 2.20  
Optické vlákno ako homogénny valcový dielektrický svetlovod.

Podľa obr. 2.18 uvažujeme, že index lomu vyšetřovaného OV nie je funkciou súradnice  $z$  a jeho závislosť od priečných súradníc je určená vzťahmi

$$n(r) = \begin{cases} n_1 & \text{pre } r \leq a \text{ (jadro OV)} \\ n_2 & \text{pre } r > a \text{ (plášť OV)} \end{cases} \quad (2.5.1)$$

kde  $a$  je polomer jadra OV. Ak uvažujeme elektromagnetickú vlnu s frekvenciou  $\omega$ , ktorá sa šíri v smere  $z$  s fázou konštantnou  $\beta$ , potom pre jej fázor-vektory intenzity elektrického a magnetického poľa platí

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0(r, \varphi) \exp[j(\omega t - \beta z)] \right\} \quad (2.5.2)$$

$$\vec{H} = \text{Re} \left\{ \vec{H}_0(r, \varphi) \exp[j(\omega t - \beta z)] \right\} \quad (2.5.3)$$

Zložky fázor-vektorov  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  vyhovujú Maxwellovým rovniciam vo valcovej súradnicovej sústave, z ktorých dostaneme

$$E_{0r} = -\frac{j}{\Gamma^2} \left( \beta \frac{\partial E_{0z}}{\partial r} + \omega \mu_0 \frac{\partial H_{0\varphi}}{\partial \varphi} \right) \quad (2.5.4)$$

$$E_{0\varphi} = -\frac{j}{\Gamma^2} \left( \beta \frac{1}{r} \frac{\partial E_{0z}}{\partial \varphi} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_{0r}}{\partial r} \right) \quad (2.5.5)$$

$$H_{0r} = -\frac{j}{\Gamma^2} \left( \beta \frac{\partial H_{0z}}{\partial r} - \omega \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial E_{0z}}{\partial \varphi} \right) \quad (2.5.6)$$

$$H_{0\varphi} = -\frac{j}{\Gamma^2} \left( \beta \frac{1}{r} \frac{\partial H_{0z}}{\partial \varphi} + \omega \varepsilon \frac{\partial E_{0z}}{\partial r} \right) \quad (2.5.7)$$

vyjadrenie jednotlivých zložiek pomocou pozdĺžnych zložiek elektromagnetického poľa  $E_{0z}$  a  $H_{0z}$ . Zložky  $E_{0z}$  a  $H_{0z}$  získame riešením vlnových rovníc vo valcovej súradnicovej sústave

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \Gamma^2 \psi = 0 \quad (2.5.8)$$

kde  $\psi$  reprezentuje zložku  $E_{0z}$  alebo  $H_{0z}$ . V predchádzajúcich rovniciach je

$$\Gamma = \sqrt{k^2 n^2 - \beta^2} \quad (2.5.9)$$

**priečna konštanta šírenia**

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (2.5.10)$$

**vlnové číslo a  $n$  index lomu prostredia.** Vlnovú rovnicu (2.5.8) riešime metódou separácie premenných. Substitúciou

$$\psi(r, \varphi) = R(r) \phi(\varphi) \quad (2.5.11)$$

dostaneme dve diferenciálne rovnice:

**a) rovnicu kmitania**

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \phi = 0 \quad (2.5.12)$$

ktorej riešenie má tvar

$$\phi(\varphi) = \begin{cases} \cos(m\varphi + \xi) \\ \sin(m\varphi + \xi) \end{cases} \quad (2.5.13)$$

$$(2.5.14)$$

kde  $\xi$  je integračná konštanta (v ďalšom položíme  $\xi = 0$ );

**b) Beselovu diferenciálnu rovnicu**

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left( \Gamma^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (2.5.15)$$

ktorej riešenie má tvar

$$R(r) = \begin{cases} AJ_m(\Gamma r) + A'N_m(\Gamma r) & (\text{pre } \Gamma \text{ reálne}) \\ CK_m(\Gamma r) + C'I_m(\Gamma r) & (\text{pre } \Gamma = jg \text{ čisto imaginárne}) \end{cases} \quad (2.5.16)$$

$$(2.5.17)$$

kde  $A, A', C, C'$  sú integračné konštanty a  $J_m$  je Besselova funkcia prvého druhu,  $N_m$  je Besselova funkcia druhého druhu (tzv. Neumannova funkcia),  $K_m$  je modifikovaná Besselova funkcia prvého druhu a  $I_m$  je modifikovaná Besselova funkcia druhého druhu  $m$ -tého rádu (známe z riešenia vlnovej rovnice pre dielektrický vlnovod v predmete OTVVK).

## 2.5.2 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE V JADRE A PLÁŠTI OV

Výsledné elektromagnetické pole v OV nájdeme tak, že určíme riešenie pre jadro a plášť OV a potom splníme okrajové podmienky na rozhraní jadro – plášť.

V plášti OV sa šíri spomalená elektromagnetická vlna ( $\Gamma = jg$ ), preto pre radiálnu funkciu uvažujeme riešenie (2.5.17). Elektromagnetické pole musí byť exponenciálne klesajúcou funkciou  $r$ , preto musíme položiť  $C' = 0$  (pretože  $I_m$  diverguje pre  $r \rightarrow \infty$ ).

V jadre OV riešenie pre radiálnu funkciu  $R(r)$  nemôže byť úmerné funkciám  $N_m$  a  $K_m$ , pretože tieto divergujú pre  $r \rightarrow 0$ . Funkcia  $R(r)$  nemôže byť úmerná ani funkcii  $I_m$ , pretože ak je v jadre OV  $R(r) \sim I_m$  a v plášti je  $R(r) \sim K_m$ , potom nie je možné splniť okrajové podmienky na rozhraní jadro-plášť. Vyplyva to z toho, že  $I'_m/I_m$  je vždy kladné a  $K'_m/K_m$  je vždy záporné (s čiarkou označujeme deriváciu príslušnej Besselovej funkcie).

Teda radiálna funkcia musí byť v jadre OV úmerná  $J_m$  a v plášti OV úmerná  $K_m$ . To tiež znamená, že konštanta  $\Gamma$  je v jadre reálna a v plášti čisto imaginárna. Z rovnice (2.5.9) potom vyplýva, že pre konštantu šírenia  $\beta$  platí

$$kn_2 < \beta < kn_1 \quad (2.5.18)$$

Na základe uvedeného rozboru možno využitím vzťahov (2.5.11), (2.5.13), (2.5.14), (2.5.16) a (2.5.17) zapísať dve riešenia elektromagnetického poľa OV (zodpovedajúce TM a TE vidom)

$$E_{0z} = \begin{cases} AJ_m(\Gamma_1 r) \sin m\varphi & (\text{pre } r \leq a) \\ CK_m(g_2 r) \sin m\varphi & (\text{pre } r \geq a) \end{cases} \quad (2.5.19)$$

$$(2.5.20)$$

$$H_{0z} = 0 \quad (\text{všade}) \quad (2.5.21)$$

a

$$H_{0z} = \begin{cases} BJ_m(\Gamma_1 r) \cos m\varphi & (\text{pre } r \leq a) \\ DK_m(g_2 r) \cos m\varphi & (\text{pre } r \geq a) \end{cases} \quad (2.5.22)$$

$$(2.5.23)$$

$$E_{0z} = 0 \quad (\text{všade}) \quad (2.5.24)$$

kde  $A, B, C, D$  sú integračné konštanty a  $\Gamma_1$  je priečna konštanta šírenia v jadre a  $g_2$  je priečna konštanta šírenia v plášti OV (index 1 sa vzťahuje k jadru a index 2 k plášti OV). Poznamenajme, že vo vzťahoch (2.5.19) a (2.5.20) sme pre funkciu  $\phi(\varphi)$  uvažovali riešenie (2.5.14) a vo vzťahoch (2.5.22) a (2.5.23) riešenie (2.5.13). Toto je v dôsledku možnosti splnenia okrajových podmienok na rozhraní jadro – plášť pre hybridné vidy, ako to ukážeme ďalej.

Pre duté kovové vlnovody riešenie určené vzťahmi (2.5.22) až (2.5.24) zodpovedá TE vidom. V optických vláknach vidy TM a TE tiež existujú ale len pre  $m = 0$ . Ak je  $m \neq 0$ , okrajové podmienky na rozhraní jadro – plášť možno splniť len vtedy, keď zvolíme lineárnu kombináciu TM a TE vidov v jadre a inú lineárnu kombináciu (s rôznymi váhami) TM a TE vidov v plášti; takto vytvorené zložené vidy nazývame hybridnými vidmi.

Dosadením zo vzťahov (2.5.19) až (2.5.24) do vzťahov (2.5.4) až (2.5.7) dostaneme všeobecné výrazy pre elektromagnetické pole TM, TE a hybridných vidov v jadre a plášti OV. V jadre OV je

$$E_{0r} = \left[ -A \frac{j\beta a}{u} J'_m\left(u \frac{r}{a}\right) + B \frac{j\omega a^2 \mu_0 m}{u^2 r} J_m\left(u \frac{r}{a}\right) \right] \sin m\varphi \quad (2.5.25)$$

$$E_{0\varphi} = \left[ -A \frac{j\beta a^2 m}{u^2 r} J_m\left(u \frac{r}{a}\right) + B \frac{j\omega a \mu_0}{u} J'_m\left(u \frac{r}{a}\right) \right] \cos m\varphi \quad (2.5.26)$$

$$E_{0z} = A J_m\left(u \frac{r}{a}\right) \sin m\varphi \quad (2.5.27)$$

$$H_{0r} = \left[ A \frac{j\omega a^2 \varepsilon_1 m}{u^2} J_m\left(u \frac{r}{a}\right) - B \frac{j\beta a}{u} J'_m\left(u \frac{r}{a}\right) \right] \cos m\varphi \quad (2.5.28)$$

$$H_{0\varphi} = \left[ -A \frac{j\omega a \varepsilon_1}{u} J'_m\left(u \frac{r}{a}\right) + B \frac{j\beta a^2 m}{u^2 r} J_m\left(u \frac{r}{a}\right) \right] \sin m\varphi \quad (2.5.29)$$

$$H_{0z} = B J_m\left(u \frac{r}{a}\right) \cos m\varphi \quad (2.5.30)$$

kde

$$u = \Gamma_1 a = a \sqrt{n_1^2 k^2 - \beta^2} \quad (2.5.31)$$

je **normovaná priečna konštanta šírenia v jadre OV** ( tzv. vlastná hodnota diferenciálneho operátora v jadre OV ). V plášti OV je

$$E_{0r} = \left[ C \frac{j\beta a}{w} K'_m\left(w \frac{r}{a}\right) - D \frac{j\omega a^2 \mu_0 m}{w^2 r} K_m\left(w \frac{r}{a}\right) \right] \sin m\varphi \quad (2.5.32)$$

$$E_{0\varphi} = \left[ C \frac{j\beta a^2 m}{w^2 r} K_m\left(w \frac{r}{a}\right) - D \frac{j\omega a \mu_0}{w} K'_m\left(w \frac{r}{a}\right) \right] \cos m\varphi \quad (2.5.33)$$

$$E_{0z} = C K_m\left(w \frac{r}{a}\right) \sin m\varphi \quad (2.5.34)$$

$$H_{0r} = \left[ -C \frac{j\omega a^2 \varepsilon_2 m}{w^2 r} K_m\left(w \frac{r}{a}\right) + D \frac{j\beta a}{w} K'_m\left(w \frac{r}{a}\right) \right] \cos m\varphi \quad (2.5.35)$$

$$H_{0\varphi} = \left[ C \frac{j\omega a \varepsilon_2}{w} K'_m\left(w \frac{r}{a}\right) - D \frac{j\beta a^2 m}{w^2 r} K_m\left(w \frac{r}{a}\right) \right] \sin m\varphi \quad (2.5.36)$$



$$H_{0z} = D K_m \left( w \frac{r}{a} \right) \cos m\varphi \quad (2.5.37)$$

kde

$$w = |\Gamma_2| a = g_2 a = a \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k^2} \quad (2.5.38)$$

je **normovaná priečna konštanta šírenia v plášti OV** (tzv. vlastná hodnota diferencionálneho operátora v plášti OV).

### 2.5.3 KLASIFIKÁCIA VIDOV

Vidy klasifikujeme najprv podľa azimutálneho vidového čísla  $m$ , potom podľa toho, či sú to TE, TM alebo hybridné (EH a HE) vidy a nakoniec podľa radiálneho vidového čísla  $l$ . Najprv opíšeme klasifikáciu vidov pomocou vidového čísla  $m$ :

**A.** V prípadoch, kde je  $m = 0$ , vo vzťahoch (2.5.25) až (2.5.30) a (2.5.31) až (2.5.37) všetky členy obsahujúce  $m$  vypadnú (sú nulové) a riešenie elektromagnetického poľa sa rozdelí do dvoch nezávislých skupín:

1. Ak uvažujeme  $B = D = 0$ , dostaneme vidy, pre ktoré sú nenulové zložky  $E_{0z}$ ,  $E_{0r}$  a  $H_{0\varphi}$  a zložky  $E_{0\varphi} = H_{0r} = H_{0z} = 0$ . Tieto vidy nazývame transversálne magnetickými vidmi (TM), pretože zložka  $H_{0z} = 0$ . Ak radiálne vidové číslo je  $l$ , tieto vidy označujeme  $TM_{0l}$ .
2. Ak uvažujeme  $A = C = 0$ , dostaneme vidy, pre ktoré sú nenulové zložky  $H_{0z}$ ,  $H_{0r}$  a  $E_{0\varphi}$  a zložky  $H_{0\varphi} = E_{0r} = E_{0z} = 0$ . Tieto vidy nazývame transversálne elektrickými vidmi (TE), pretože zložka  $E_{0z} = 0$ . Ak radiálne vidové číslo je  $l$ , tieto vidy označujeme  $TE_{0l}$ .

**B.** V prípadoch, keď je  $m \geq 1$ , elektromagnetické pole nemožno rozložiť na superpozíciu TE a TM. Jedine hybridné vidy (EH a HE) môžu splniť okrajové podmienky na rozhraní jadro – plášť OV.

### 2.5.4 EXAKTNÉ RIEŠENIE PRE KONŠTANTU ŠÍRENIA

Riešenia pre konštantu šírenia získame z okrajových podmienok (podmienok spojitosti zložiek elektromagnetického poľa) na rozhraní  $r = a$  jadro plášť OV

$$E_{0z}^{(1)} = E_{0z}^{(2)} \quad (2.5.39)$$

$$E_{0\varphi}^{(1)} = E_{0\varphi}^{(2)} \quad (2.5.40)$$

$$H_{0z}^{(1)} = H_{0z}^{(2)} \quad (2.5.41)$$

$$\varepsilon_1 E_{0r}^{(1)} = \varepsilon_2 E_{0r}^{(2)} \quad (2.5.42)$$

$$\mu_1 H_{0r}^{(1)} = \mu_2 H_{0r}^{(2)} \quad (2.5.43)$$

kde opäť index 1 sa vzťahuje k jadrú a index 2 k plášťu OV. Pre nemagnetické dielektrikum vo vzťahu (2.5.43) uvažujeme  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ . Položením  $r = a$  do vzťahov (2.5.25) až (2.5.31) a (2.5.31) až (2.5.37) a dosadením do okrajových podmienok (2.5.39) až (2.5.43) dostaneme, že koeficienty A, B, C a D musia vyhovovať rovniciam

$$AJ_m(u) - CK_m(w) = 0 \quad (2.5.44)$$

$$BJ_m(u) - DK_m(w) = 0 \quad (2.5.45)$$

$$A \frac{j\beta am}{u^2} J_m(u) - B \frac{j\omega a \mu_0}{u} J'_m(u) + C \frac{j\beta am}{w^2} K_m(w) - \\ - D \frac{j\omega a \mu_0}{w} K'_m(w) = 0 \quad (2.5.46)$$

$$A \frac{j\omega a \varepsilon_1}{u} J'_m(u) - B \frac{j\beta am}{u^2} J_m(u) + C \frac{j\omega a \varepsilon_2}{w} K_m(w) - \\ - D \frac{j\beta am}{w^2} K'_m(w) = 0 \quad (2.5.47)$$

čo možno zapísať v maticovom tvare

$$[M] \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = 0 \quad (2.5.48)$$

Táto sústava homogénnych lineárnych rovníc má pre stĺpcový vektor [A, B, C, D] netriviálne riešenie, ak

$$\det [M] = 0 \quad (2.5.49)$$

z čoho dostaneme rovnicu (tzv. **charakteristickú rovnicu OV**)

$$\left[ \frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)} \right] \cdot \left[ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)} \right] = \\ = m^2 \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \cdot \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (2.5.50)$$

Pripomeňme, že táto rovnica obsahuje obidve konštanty u a w. Ak vyriešime rovnicu (2.5.50) spolu s rovnicou

$$u^2 + w^2 = a^2(n_1^2 k^2 - \beta^2) + a^2(\beta^2 - n_2^2 k^2) = k^2 n_1^2 a^2 2\Delta \quad (2.5.51)$$

kde  $\Delta$  je relatívny rozdiel indexu lomu (2.3.6), potom možno určiť u a w a teda aj konštantu šírenia  $\beta$ . V ďalšom analyzujeme riešenie týchto rovníc pre jednotlivé typy vidov:

#### a) TM vidy

Pretože  $m = 0$ , je pravá strana rovnice (2.5.50) nulová. Pripomeňme, že  $B = D = m = 0$ , z čoho vyplýva, že rovnice (2.5.45) a (2.5.46) sú triviálne (typu  $0 = 0$ ) a rovnice (2.5.44) a (2.5.47) vedú k rovnici

$$\frac{\varepsilon_1 J'_0(u)}{\varepsilon_2 u J_0(u)} + \frac{K'_0(w)}{w K_0(w)} = 0 \quad (2.5.52)$$

ktorá je obsiahnutá v rovnici (2.5.50).

### b) TE vidy

Podobne  $m = 0$ , preto je pravá strana rovnice (2.5.50) nulová. Pretože  $A = C = m = 0$ , rovnice (2.5.44) a (2.5.47) sú triviálne a rovnice (2.5.45) a (2.5.46) vedú k rovnici

$$\frac{J'_0(u)}{uJ_0(u)} + \frac{K'_0(w)}{wK_0(w)} = 0 \quad (2.5.53)$$

ktorá je obsiahnutá v rovnici (2.5.50).

### c) Hybridné vidy

Ak je  $m \geq 1$ , riešením rovníc (2.5.50) a (2.5.51) dostaneme dva súbory riešení, ktoré zodpovedajú EH a HE vidom. Riešenie týchto vidov vo všeobecnosti je komplikované, v ďalšom uvedieme približné riešenie pri aproximácii slabovedúcich OV.

## 2.5.5 APROXIMÁCIA SLABOVEDÚCICH OPTICKÝCH VLÁKIEN

Pri aproximácii slabovedúcich vlákien je  $\Delta \ll 1$ , z čoho vyplýva, že aj  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) / \varepsilon_1 \ll 1$ . Potom platí:

1. Konštanta šírenia TM vidov sa približne rovná konštante šírenia TE vidov (rovnica (2.5.52), prechádza v rovnicu (2.5.53), pretože  $\varepsilon_1 \cong \varepsilon_2$ ).
2. Konštanta šírenia hybridných vidov ( $m \geq 1$ ) sa dá vyjadriť v omnoho jednoduchšom tvare. Pretože  $\varepsilon_1 \cong \varepsilon_2$ , rovnica (2.5.50) má jednoduchší približný tvar

$$\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} = \pm m \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (2.5.54)$$

Rovnicu (2.5.53), ktorá v tomto priblížení platí pre TE aj TM vidy, možno použitím rekurentných vzťahov

$$J'_0(u) = -J_1(u) \quad a \quad K'_0(w) = -K_1(w) \quad (2.5.55)$$

medzi Besselovými funkciami zapísať v tvare

$$-\frac{J_1(u)}{uJ_0(u)} = \frac{K_1(w)}{wK_0(w)} \quad (2.5.56)$$

Na druhej strane rovnica (2.5.54) poskytuje dva súbory riešení pre kladné a záporné znamienko pravej strany. Pre kladné znamienko pravej strany možno použitím rekurentných vzťahov medzi Besselovými funkciami rovnicu (2.5.54) upraviť na tvar

$$-\frac{J_{m+1}(u)}{uJ_m(u)} = \frac{K_{m+1}(w)}{wK_m(w)} \quad (2.5.57)$$

Tie vidy, ktorých konstantu šírenia získame riešením rovníc (2.5.57) a (2.5.51), nazývame EH vidy. Pre záporné znamienko pravej strany podobne dostaneme

$$\frac{J_{m-1}(u)}{uJ_m(u)} = \frac{K_{m-1}(w)}{wK_m(w)} \quad (2.5.58)$$

Tie vidy, ktorých konštantu šírenia získame riešením rovníc (2.5.58) a (2.5.51), nazývame HE vidy.

Pripomeňme, že takéto označenie hybridných vidov pochádza z mikrovlnovej techniky, kde bolo zavedené už v r. 1930. Pre EH vidy je axiálna zložka intenzity magnetického poľa  $H_{0z}$  relatívne väčšia ako  $E_{0z}$  a pre HE vidy je axiálna zložka intenzity elektrického poľa  $E_{0z}$  relatívne väčšia ako  $H_{0z}$ .

Pri aproximácii slabovedúcich OV možno rovnice (2.5.56), (2.5.57) a (2.5.58) pre TM, TE, EH a HE vidy zapísať v jednotnom tvare. Rovnicu (2.5.58) možno upraviť na tvar

$$u \frac{\left\{ 2 \left( \frac{m-1}{u} \right) J_{m-1}(u) - J_{m-2}(u) \right\}}{J_{m-1}} = \frac{w \left\{ 2 \left( \frac{m-1}{w} \right) K_{m-1}(w) + K_{m-2}(w) \right\}}{K_{m-1}} \quad (2.5.59)$$

z čoho dostaneme

$$\frac{uJ_{m-2}(u)}{J_{m-1}(u)} = - \frac{wK_{m-2}(w)}{K_{m-1}(w)} \quad (2.5.60)$$

Rovnice (2.5.56), (2.5.57) a (2.5.60) možno zapísať v jednotnom tvare, ktorý nazývame **charakteristická rovnica OV**

$$\frac{uJ_{m'-1}(u)}{uJ_m(u)} = - \frac{wK_{m'-1}(w)}{K_m(w)} \quad (2.5.61)$$

kde index  $m'$  je určený vzťahom

$$m' = \begin{cases} 1 & (\text{pre } TM \text{ a } TE \text{ vidy}), \\ m+1 & (\text{pre } EH \text{ vidy}), \\ m-1 & (\text{pre } HE \text{ vidy}). \end{cases} \quad (2.5.62)$$

Ak je index  $m'$  záporný, zmeníme jeho znamienko použitím vzťahov  $J_{-i} = -J_i$  a  $K_{-i} = -K_i$ . Nové vidové číslo má dôležitý fyzikálny význam pre zavedenie tzv. **lineárne polarizovaných (LP) vidov**.

Výsledky rozboru možných vidov pri aproximácii slabovedúcich OV možno zhrnúť v tvare **tabuľky 2.1**. V tabuľke sú uvedené označenia vidov a im zodpovedajúce charakteristické rovnice OV. Prvé vidové číslo  $m$  určuje azimutálnu závislosť  $E_{0z}$  alebo  $H_{0z}$ . Druhé vidové číslo  $l$  znamená, že konštanta šírenia sa počíta z  $l$ -tého najmenšieho koreňa charakteristickej rovnice (určenej z **tab. 2.1**) a rovnice (2.5.51).

Vo vlnovej teórii OV sa definuje parameter

$$v = ka(NA) = kn_1 a \sqrt{2\Delta} \quad (2.5.63)$$

ktorý nazývame **normovanou frekvenciou** (je úmerný frekvencii svetla). Zo vzťahu (2.5.51) dostaneme

$$v^2 = u^2 + w^2 \quad (2.5.64)$$

## TRADIČNÉ OZNAČENIA VIDOV V OV

Označenie vidov	Charakteristická rovnica OV
TM <sub>01</sub> a TE <sub>01</sub>	$\frac{u J_0(u)}{J_1(u)} = -\frac{w K_0(w)}{K_1(w)}$
EH <sub>ml</sub> (pre m ≥ 1)	$\frac{u J_m(u)}{J_{m+1}(u)} = -\frac{w K_m(w)}{K_{m+1}(w)}$
HE <sub>11</sub>	$\frac{u J_1(u)}{J_0(u)} = -\frac{w K_1(w)}{K_0(w)}$
HE <sub>ml</sub> (pre m = 2)	$\frac{u J_{m-2}(u)}{J_{m-1}(u)} = -\frac{w K_{m-2}(w)}{K_{m-1}(w)}$

ak sú známe parametre OV ( $n_1$ ,  $a$ ,  $\Delta$ ) a vlnová dĺžka  $\lambda$ , potom normovanú frekvenciu môžeme vypočítať. Normovaná priečna konštanta šírenia  $u$  ako funkcia  $v$ , ktorú získame z príslušnej rovnice v tab. 2.1 a vzťahu (2.5.64). Zo vzťahov (2.5.31) a (2.5.63) možno vyjadriť **fázovú konštantu šírenia** v tvare

$$\beta = k n_1 \sqrt{1 - \frac{2 \Delta u^2}{v^2}} \quad (2.5.65)$$

Prenosové charakteristiky OV sa často vyjadrujú v tvare grafickej závislosti  $v$  od pomeru  $\beta/k$ . Pre OV sa tiež definuje **normovaná konštanta šírenia**.

$$b = 1 - \frac{u^2}{v^2} = \frac{\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} = \frac{\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 - n_2^2}{2n_1^2 \Delta} \quad (2.5.66)$$

Zo vzťahu (2.5.18) vyplýva, že  $0 < b < 1$ .

### 2.5.6 KRITICKÉ FREKVENCIE VIDOV

Modifikované Besselove funkcie druhého druhu  $K_m$  klesajú exponenciálne s rastúcou hodnotou  $r$ . Preto, ak parameter  $w$  je reálny a konečný, t.j. ak

$$k n_2 < \beta \quad (2.5.67)$$

elektromagnetické pole klesá exponenciálne v plášti OV a teda môžeme predpokladať, že energia elektromagnetického poľa je sústredená v jadre OV. Ak je však

$$\beta = kn_2 \quad (2.5.68)$$

t.j. keď fázová rýchlosť šírenia sa rovná fázovej rýchlosti šírenia rovinatej vlny v materiáli plášte, z rovnice (2.5.38) dostaneme  $w = 0$ . To však znamená, že elektromagnetické pole neklesá exponenciálne v plášti OV a energia elektromagnetického poľa nie je sústredená v jadre OV. Podmienka, popísaná rovnicou (2.5.68), sa nazýva **kritická (medzná) podmienka** a frekvencia svetla, pre ktorú je táto podmienka splnená, sa nazýva **kritická (medzná) frekvencia**.

V OV je možný prenos energie elektromagnetického poľa príslušným vidom len pre frekvencie nad kritickou frekvenciou. Prenášané vidy pri takýchto frekvenciách nazývame **širiacimi sa vidami**. Ak je frekvencia menšia ako kritická frekvencia, t.j.  $\beta < kn_2$  a preto  $w$  je čisto imaginárne. Imaginárna hodnota  $w$  znamená, že tlmenie v plášti OV prudko vzrastá a vlna sa nemôže šíriť v pozdĺžnom smere. Riešením vlnovej rovnice v tomto prípade dostaneme tzv. **vyžiarené vidy**. Keď však  $\beta < kn_2$ , ale rozdiel týchto veličín je veľmi malý, strata energie elektromagnetického poľa vyžiareníem je čiastočne ohraničená určitou potenciálovou bariérou na rozhraní jadro – plášť OV a vlna sa môže šíriť v OV do určitej vzdialenosti. Riešením vlnovej rovnice v týchto prípadoch dostaneme tzv. **vytekajúce vidy**.

Vypočítajme kritické frekvencie jednotlivých vidov v slabovedúcich OV. Pretože  $w = 0$  a preto  $u = v$  pre kritickú frekvenciu, sú normované kritické frekvencie  $v_c$  LP<sub>m'l</sub> vidov

$$v_c = \alpha_{(m'-1)l} \quad (2.5.69)$$

kde  $\alpha_{(m'-1)l}$  označuje  $l$  – tý koreň Besselovej funkcie prvého druhu ( $m' - 1$ ) – ho rádu (t.j.  $l$  – tý koreň rovnice  $J_{m'-1}(x) = 0$ ).

Pre **kritické frekvencie jednotlivých vidov** v konvenčnom označení (tab. 2.1) dostaneme

$$v_c = \begin{cases} \alpha_{0l} & \text{pre } TM_{0l} \text{ a } TE_{0l} \text{ vidy,} \\ \alpha_{ml} & \text{pre } EH_{ml} \text{ vidy } (m \geq 1), \\ 0 \text{ a } \alpha_{1l} & \text{pre } HE_{1l} \text{ vidy,} \\ \alpha_{(m-2)l} & \text{pre } HE_{ml} \text{ vidy } (m \geq 2). \end{cases} \quad (2.5.70)$$

## 2.5.7 LINEÁRNE POLARIZOVANÉ VIDY

Z rovníc (2.5.61) a (2.5.62) vyplýva, že pri aproximácii riešenia v slabovedúcich OV, všetky vidy charakterizované určitou množinou vidových čísel  $m'$  a  $l$  vyhovujú spoločnej charakteristickej rovnici. To znamená, že tieto vidy sú degenerované. Tieto degenerované vidy nazývame **LP vidy, t.j. lineárne polarizované vidy**. V tomto novom (nekonvenčnom) označovaní vidov nezohľadňujeme rôzne konfigurácie elektromagnetického poľa, označovanie je sústredené na rozlíšenie vidov podľa fázovej konštanty šírenia. Vidy, charakterizované určitou množinou vidových čísel  $m'$  a  $l$ , majú rovnaké fázové konštanty (pri aproximácii slabovedúcich OV) a označujeme ich LP<sub>m'l</sub> vidy bez ohľadu na ich TM, TE, EH alebo HE vidovú konfiguráciu elektromagnetického poľa.

Všeobecné prevodné vzťahy medzi tradičným označením vidov (TM, TE, EH a HE) a LP vidmi sú v tab. 2.2. Podrobnejšie je tento vzájomný vzťah ukázaný v tab. 2.3 pre 10 LP vidov s najmenšími kritickými frekvenciami. Stupeň degenerácie LP vidov určíme z nasledovnej úvahy: Všetky EH a HE vidy majú dve lineárne nezávislé zložky, vyjadrené závislosťami  $\sin(m\varphi)$  a  $\cos(m\varphi)$ , (t.j. ak  $m = 1$  sú to vertikálne a horizontálne polarizované vlny). Pre TM a TE vidy takáto polarizácia neexistuje, pretože toto sú axiálne symetrické vidy.

Tabuľka 2.2

## VZŤAH MEDZI TRADIČNÝM OZNAČOVANÍM VIDOV A LP VIDMI

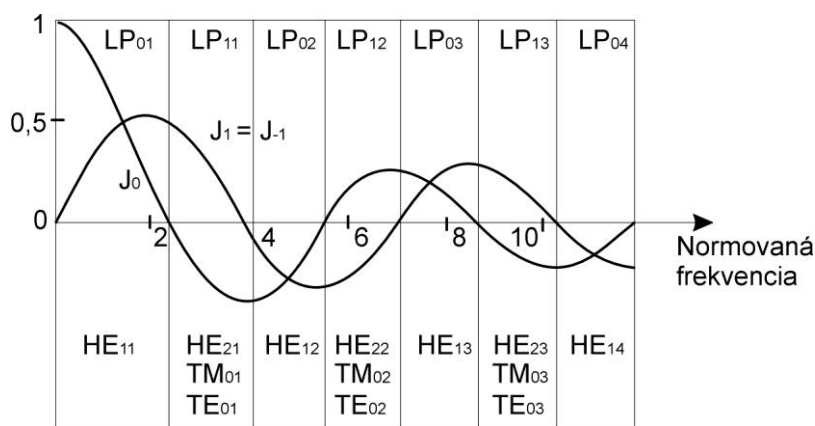
Označenie vidov		Stupeň degenerácie	Charakteristická rovnica OV
LP	Tradičné		
LP <sub>01</sub> (m' = 0)	HE <sub>11</sub>	2	$\frac{u J_1(u)}{J_0(u)} = \frac{w K_1(w)}{K_0(w)}$
LP <sub>11</sub> (m' = 1)	TE <sub>01</sub> TM <sub>01</sub> HE <sub>21</sub>	4	$\frac{u J_0(u)}{J_1(u)} = \frac{w K_0(w)}{K_1(w)}$
LP <sub>m'1</sub> (m' ≅ 2)	EH <sub>(m'-1)1</sub> HE <sub>(m'+1)1</sub>	4	$\frac{u J_{m'-1}(u)}{J_{m'}(u)} = -\frac{w K_{m'-1}(w)}{K_{m'}(w)}$

Tabuľka 2.3

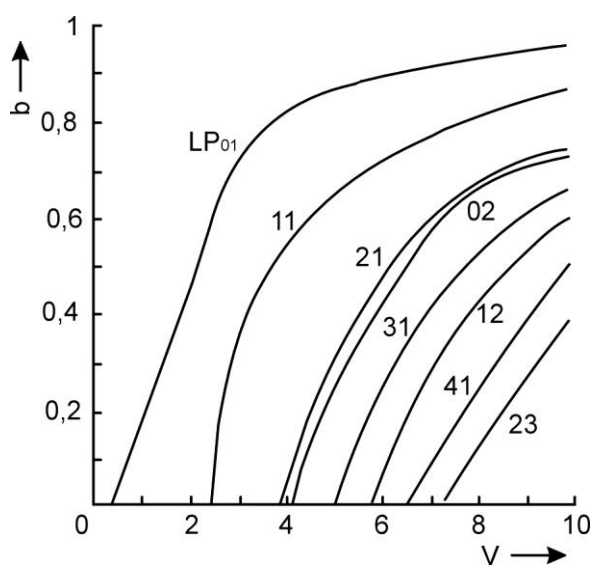
## ROZDELENIE 10 NAJNIŽŠÍCH LP VIDOV

LP vidy	Tradičné označenie a počet Vidov	Stupeň degenerácie
LP <sub>01</sub>	HE <sub>11</sub> x 2	2
LP <sub>11</sub>	TE <sub>01</sub> , TM <sub>01</sub> , HE <sub>21</sub> x 2	4
LP <sub>21</sub>	EH <sub>11</sub> x 2, HE <sub>31</sub> x 2	4
LP <sub>02</sub>	HE <sub>12</sub> x 2	2
LP <sub>31</sub>	EH <sub>21</sub> x 2, HE <sub>41</sub> x 2	4
LP <sub>12</sub>	TE <sub>02</sub> , TM <sub>02</sub> , HE <sub>22</sub> x 2	4
LP <sub>41</sub>	EH <sub>31</sub> x 2, HE <sub>51</sub> x 2	4
LP <sub>22</sub>	EH <sub>12</sub> x 2, HE <sub>32</sub> x 2	4
LP <sub>03</sub>	HE <sub>13</sub> x 2	2
LP <sub>051</sub>	EH <sub>41</sub> x 2, HE <sub>61</sub> x 2	4

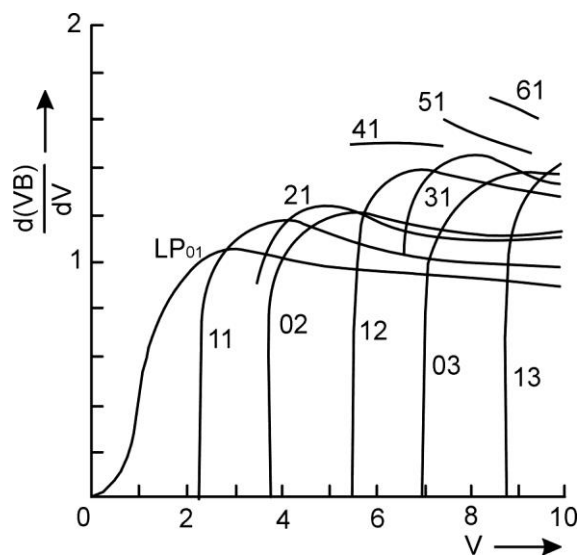
Vznik najnižších sedem LP vidov v OV je znázornený na **obr. 2.21**. Na obrázku je znázornené označenie LP vidov aj tradičných HE, EH, TE a TM vidov. Vznik vidov vyplýva z grafu Besselových funkcií  $J_0$  a  $J_1$  vynesných v závislosti od normovanej frekvencie  $v$ . Možnosť vzniku určitého vidu je spojená s koreňom týchto funkcií, t.j. bodom, kde  $v = v_c$ . Prvý koreň funkcie  $J_1$  nastáva pri  $v = 0$ , čo zodpovedá kritickej frekvencii vidu LP<sub>01</sub>. Prvý koreň funkcie  $J_0$  je pre  $v = 2,405$ , čo zodpovedá kritickej frekvencii vidu LP<sub>11</sub>. Podobne druhý koreň funkcie  $J_1$  je pre  $v = 3,83$ , čo zodpovedá kritickej frekvencii vidu LP<sub>02</sub>. V závislosti od parametrov OV a vlnovej dĺžky  $\lambda$  (resp. frekvencii  $f$ ) svetla sa môžu v OV šíriť rôzne LP<sub>m'1</sub> vidy. Toto je znázornené na **obr. 2.22**, kde je zobrazená závislosť normovanej konštanty šírenia  $b$  ako funkcie normovanej frekvencie pre niektoré LP<sub>m'1</sub> vidy. Vidíme, že kritické hodnoty normovanej frekvencie  $v_c$  jednotlivých LP vidov, ktoré vznikajú, ak  $\beta = n_2 k$ , zodpovedajú  $b = 0$ . Ďalšou dôležitou charakteristikou mnohovidového optického vlákna je vidová disperzia, ktorá je, ako závislosť veličiny  $d(vb) / dv$  od  $v$  pre rôzne LP vidy, znázornená na **obr. 2.23**.



Obr. 2.21  
Oblasti vzniku LP vidov v homogénnom SI – MM OV.



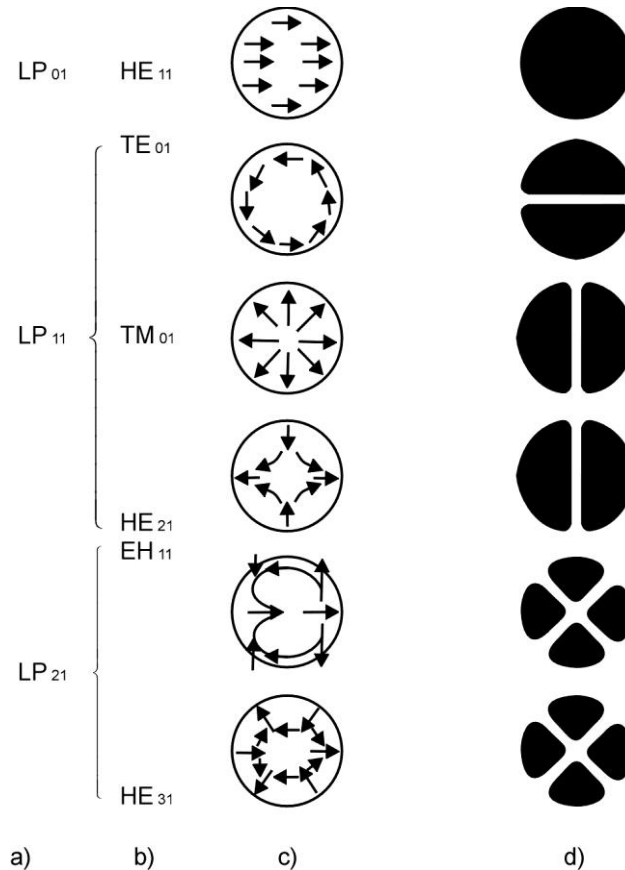
Obr. 2.22  
Normovaná konštanta šírenia  $b$  ako funkcia normovanej frekvencie  $V$  pre niektoré LP<sub>m'l</sub> vidy.



Obr. 2.23  
Závislosť  $d(Vb) / dV$  od normovanej frekvencie  $V$  pre niektoré LP<sub>m'l</sub> vidy.



Podrobný rozbor konfigurácie elektromagnetického poľa každého vidu ukazuje, že rozloženie intenzity elektrického poľa v priečnej rovine (t.j. rozloženie  $E_{0x}$  alebo  $E_{0y}$ ) je rovnaké pre všetky vidy patriace k určitému LP vidu. Názov lineárne polarizovaný vid pochádza práve z tejto vlastnosti LP vidov. Na obr. 2.24 je znázornené rozloženie intenzity elektrického poľa  $E_{0x}$  troch najnižších LP vidov v homogénnom SI – MM OV. Šírenie určitých vidov v optickom vlákne možno sledovať aj vizuálnou analýzou. Rozloženie intenzity elektrického poľa určitých vidov zodpovedá podobnému rozloženiu intenzity svetla v jadre OV. Tieto tzv. **vlňové obrazce** (často nazývané **vidovými obrazcami**) môžu indikovať dominantné šírenie určitých vidov (alebo vidu) v OV. Zobrazenie vidových obrazcov pri dominantnom šírení len jedného vidu je podobné obrazcom na obr. 2.24d.



Obr. 2.24

Rozloženie intenzity elektrického poľa troch najnižších LP vidov v homogénnom SI – MM OV:

- (a) označenie LP vidov,
- (b) tradičné označenie vidov,
- (c) rozloženie elektromagnetického poľa tradičných vidov,
- (d) rozloženie  $E_{0x}$  pre LP vidy.

## 2.5.8 MNOHOVIDOVÉ A JEDNOVIDOVÉ OPTICKÉ VLÁKNA

Mnohovidové OV umožňujú šírenie konečného počtu vedených vidov. Počet vedených vidov závisí od parametrov OV ( $\Delta$ ,  $a$ ) a vlnovej dĺžky  $\lambda$  prenášaného svetla, čo vyjadrujeme väčšinou normovanou frekvenciou  $v$ . Pre každý vid existuje určitá hodnota kritickej normovanej frekvencie  $v_c$ , pod ktorou sa vid nešíri. Treba si však uvedomiť, že toto „nešírenie“ vidu pod kritickou frekvenciou  $v_c$  nie je ostré, pretože takéto vidy sa môžu v OV šíriť relatívne aj na väčšie vzdialenosti vo forme tzv. vyžiarených alebo vytekajúcich vidov. Pre prenos signálov však majú dominantný význam vedené vidy, ktoré sa šíria po celej dĺžke OV. Možno ukázať, že celkový počet vedených vidov, alebo tzv. **vidový objem**  $M_s$  pre SI – MM OV, je určený približným vzťahom

$$M_s \cong \frac{v^2}{2} \quad (2.5.71)$$

Počet vedených vidov je v mnohovidových OV veľký (niekoľko stovák a tisíc). Preto sa optický výkon naviazaný do OV šíri veľkým počtom vidov, ktoré majú rôzne rozloženie elektromagnetického poľa, rôzne konštanty šírenia atď. V ideálnom SI – MM OV s parametrami ( $\Delta$ ,  $a$ ) nezávislými od vzdialenosti, nevzniká vzájomná väzba vidov, optický výkon naviazaný do určitého vidu sa šíri pozdĺž OV v tomto vide, nezávisle od ostatných vidov (resp. optického výkonu naviazaného do iných vedených vidov). Tiež väčšina týchto vidov sa šíri za podmienok vzdialených od kritickej frekvencie a sú teda dobre sústredené v jadre OV. To ovšem znamená, že väčšia časť optického výkonu sa šíri v jadre a nie v plášti. Preto vlastnosti plášťa (najmä jeho hrúbka) neovplyvňujú podstatne šírenie týchto vidov. Poruchy optického vlákna narušia tento ideálny prípad, vzniká vzájomná väzba vidov a prelínanie optického výkonu z jedného vidu do druhého.

Výhoda šírenia jedného vidu v OV je, že sa odstráni disperzia signálu, spôsobená rôznym oneskorením jednotlivých vidov v mnohovidovom OV. Mnohovidové OV prakticky neumožňujú šírenie jediného vidu vzhľadom na ťažkosti dosiahnutia jednovidovej prevádzky, ak vzniká vzájomná väzba vidov (tzv. **vidová konverzia**) v dôsledku neprispôsobenia vstupu alebo nedokonalosti (porúch) OV. Preto pre prenos jediného vidu musí byť navrhnuté jednovidové optické vlákno tak, aby umožnilo vedenie len jediného vidu a šírenie všetkých ostatných vidov potlačilo vytekaním alebo absorpciou.

Toto môže byť realizované vhodnou voľbou normovanej frekvencie OV. Pre jednovidový režim práce sa uvažuje s vedením základného  $LP_{01}$  vidu. Ohraničenie pásma jednovidovosti je preto určené kritickou frekvenciou ďalšieho vidu  $LP_{11}$  a to  $v_c \cong 2,405$ . Preto šírenie len dominantného vidu  $LP_{01}$  OV vzniká, ak

$$0 < v = k n_1 a \sqrt{2\Delta} < v_c^{LP_{11}} \cong 2,405 \quad (2.5.72)$$

Ak sú rozmery a podmienky šírenia v stupňovitom OV zvolené tak, že platí táto nerovnosť, potom sa v OV môže šíriť len dominantný vid  $LP_{01}$  a hovoríme o **jednovidovom stupňovitom (SI - SM) OV**. Predovšetkým SI – SM OV musia mať malý priemer  $\sim 1\mu\text{m}$  (čo sťažuje výrobu ako aj naviazanie optického výkonu do OV). Ak chceme zaručiť jednovidovosť OV aj pri väčších priemeroch jadra ( $\sim$  niekoľko  $\mu\text{m}$ ), musíme voliť malé  $\Delta$ , z čoho ovšem vyplýva, že relatívne veľká časť energie elektromagnetického poľa (až 50%) sa šíri v plášti OV, čo je nevýhodné (väčší priemer celého OV). Preto sa pre jednovidové OV používajú aj iné profily indexu lomu, napr. vlákno typu W (**obr. 2.3**).

Pripomeňme, že v jednovidovom stupňovitom optickom vlákne sa v skutočnosti môžu šíriť dva vidy  $LP_{01}$  s navzájom ortogonálnou polarizáciou a pojem jednovidový sa vzťahuje na šírenie svetla s určitou polarizáciou.

## 2.6 VLNOVÁ TEÓRIA ŠÍRENIA SVETLA V OPTICKOM VLÁKNE SO SPOJITOU ZMENOU INDEXU LOMU

Vlnová teória šírenia svetla môže byť použitá aj pre optické vlákna so spojitou zmenou indexu lomu. Táto teória je však omnoho zložitejšia, náročnejšia a rozsiahlejšia ako pre OV so skokovou zmenou indexu lomu. V ďalšom uvedieme v stručnosti len základné výsledky tejto teórie.

Približné riešenie elektromagnetického poľa v gradientných OV môžeme získať použitím tzv. **WKB (Wentzel, Kramers a Brillouin)** metódy známej z kvantovej mechaniky. Použitím **WKB metódy** možno riešenie vedeného vidu pre  $x - o\ddot{v}$  zložku intenzity elektrického poľa vyjadriť v tvare

$$E_x = \frac{1}{2} \left| G_1(r) e^{jS(r)} + G_2(r) e^{-jS(r)} \right| \left( \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \right) e^{j\beta z} \quad (2.6.1)$$

kde  $G_1$ ,  $G_2$  a  $S$  sú reálne funkcie  $r$ . Dosadením (2.6.1) do skalárnej vlnovej rovnice (2.5.8) (v ktorej konštantný index lomu jadra  $n_1$  nahradíme premenným indexom lomu  $n(r)$ ) a zanedbaním druhej derivácie  $G(r)$  podľa  $r$  získame približné riešenie pre tzv. **amplitúdové funkcie**  $G_1(r)$  a **fázovú funkciu**  $S(r)$ . Z obr. 2.2 a obr. 2.15 vidíme, že lúč, ktorý sa šíri v gradientnom OV, nemusí prechádzať cez všetky body v jadre OV. Lúč je obsiahnutý medzi dvomi valcovými povrchmi (tzv. kaustikami) a pre mnohé lúče kaustika nie je totožná s rozhraním jadro – plášť OV. Teda kaustiky určujú klasický bod obratu svetelného lúča v gradientnom OV. Uvažujeme, že tieto body obratu, určené dvomi kaustikami, nastávajú pre  $r = r_1$  a  $r = r_2$ .

Výsledok WKB aproximačnej metódy riešenia šírenia svetla v gradientnom OV vedie k oscilačnému elektromagnetickému poľu v oblasti  $r_1 < r < r_2$  medzi kaustikami

$$G_1(r) = G_2(r) = \frac{D}{\left[ \left( n^2(r)k^2 - \beta \right) r^2 - m^2 \right]^{1/4}} \quad (2.6.2)$$

a

$$S(r) = \int_{r_1}^{r_2} \left[ \left( n^2(r)k^2 - \beta^2 \right) r^2 - m^2 \right]^{1/2} \frac{dr}{r} - \frac{\pi}{4} \quad (2.6.3)$$

kde  $D$  je integračná konštanta (tzv. amplitúdový koeficient). Mimo oblasti  $r_1 < r < r_2$  riešenie musí mať exponenciálne klesajúci charakter. V oblasti vnútornej kaustiky, t.j. pre  $r < r_1$  (uvažujeme  $r_1$  nie je veľmi blízko  $r = 0$ ), riešenie má tvar

$$G_1(r) = \frac{D e^{j1\pi}}{\left[ \left( m^2 - n^2(r)k^2 - \beta^2 \right) r^2 - m^2 \right]^{1/4}} \quad (2.6.4)$$

$$G_2 = 0$$

a

$$S(r) = j \int_r^{r_2} \left[ \left( m^2 - n^2(r)k^2 - \beta^2 \right) r^2 \right]^{1/2} \frac{dr}{r} \quad (2.6.5)$$

kde  $l$  je radiálne vidové číslo. V oblasti mimo vonkajšej kaustiky, t.j. pre  $r > r_2$  má riešenie tvar

$$G_1(r) = \frac{D e^{j1\pi}}{\left[ \left( m^2 - n^2(r)k^2 - \beta^2 \right) r^2 - m^2 \right]^{1/4}} \quad (2.6.6)$$

$$G_2 = 0 \quad (2.6.7)$$

a

$$S(r) = j \int_{r_2}^r \left[ \left( m^2 - n^2(r)k^2 - \beta^2 \right) r^2 \right]^{1/2} \frac{dr}{r} \quad (2.6.8)$$

Funkcia  $S(r)$  je čisto imaginárna (2.6.5) a (2.6.8), z čoho vyplýva exponenciálny pokles amplitúdy elektromagnetického poľa v oblasti mimo kaustík. WKB metóda neposkytuje správne riešenie vlnovej rovnice v blízkosti bodov obratu. Toto môžeme odstrániť nahradením skutočného priebehu indexu lomu v oblasti kaustík jeho lineárnou aproximáciou. Potom riešenie v bodoch obratu možno vyjadriť ako superpozíciu Hankelových funkcií prvého a druhého druhu rádu  $1/3$ . Toto umožňuje spojiť vyššie opísané riešenia pre oblasti vo vnútri a mimo kaustík. Takto WKB metóda umožňuje nájsť

aproximovaný tvar charakteristickej rovnice gradientného OV pre konštantu šírenia  $\beta$  vedených vidov, ktorú nemôžeme získať z lúčovej teórie šírenia svetla. Charakteristická rovnica pre  $\beta$  v aproximácii WKB má tvar

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[ \left( n^2(r) k^2 - \beta^2 \right) r^2 - m^2 \right]^{1/2} \frac{dr}{r} = (2l-1) \frac{\pi}{2} \quad (2.6.9)$$

kde  $l = 1, 2, 3, \dots$ . Túto charakteristickú rovnicu možno vyriešiť v analytickom tvare len pre niekoľko jednoduchých profilov indexu lomu OV. Vo väčšine prípadov musí byť táto rovnica riešená približne (použitím vhodných aproximácií) alebo použitím numerických metód.

Amplitúdový koeficient  $D$  možno vyjadriť pomocou celkového optického výkonu  $P_G$  vo vedenom vide v tvare

$$D = \frac{4 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{P_G}}{n_1 \pi a I} \quad (2.6.10)$$

kde

$$I = \int_{r_1/a}^{r_2/a} \frac{x dx}{\left[ \left( n^2(ax) k^2 - \beta \right) a^2 x^2 - m^2 \right]^{1/2}} \quad (2.6.11)$$

WKB metódu možno použiť na výpočet konštánt šírenia pre vedené vidy v gradientnom optickom vlákne s parabolickým profilom indexu lomu. Zo vzťahu (2.4.1) pre  $\alpha = 2$  dostaneme

$$n^2(r) = n_1^2 \left( 1 - 2 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \Delta \right) \quad \text{pre } r < a \quad (2.6.12)$$

Dosadením tohto vzťahu do rovnice (2.6.9) dostaneme

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[ n_1^2 - \beta^2 - 2n_1^2 k^2 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \Delta - \frac{m^2}{r^2} \right]^{1/2} dr = \left( l + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (2.6.13)$$

Integrál možno vypočítať substitúciou  $u = r^2$ . Po vypočítaní integrálu dostaneme

$$\left[ \frac{a \left( n_1 k^2 - \beta^2 \right)}{4 n_1 k \sqrt{2 \Delta}} - \frac{m}{2} \right] \pi = \left( l + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (2.6.14)$$

ktorej riešením je

$$\beta = n_1 k \sqrt{\frac{1 - 2 \sqrt{2 \Delta}}{n_1 k a}} (2l + m + 1) \quad (2.6.15)$$

Pripomeňme, že toto riešenie pre konštantu šírenia v gradientnom vlákne s kvadratickým profilom indexu lomu platí v aproximácii WKB. Súčasne ovšem vzťah (2.6.15) je exaktným riešením skalárnej vlnovej rovnice pre OV s plášťom rozprestierajúcim sa až do nekonečna. Reálne optické vlákna majú plášť ohraničený s konštantným indexom lomu  $n_2$ , preto riešenie (2.6.15) je len aproximáciou skutočnosti.

Rovnica (2.6.15) umožňuje geometrickú reprezentáciu vedených vidov (**obr. 2.25**) v rovine vidových čísel  $m, l$ . Na obrázku je znázornená hranica vedených vidov, ktorá oddeľuje vedené vidy od vyžiarených a vytekajúcich vidov. Táto hranica je určená konštantnou hodnotou  $\beta$  vyplývajúcou z (2.6.15), ktorá vzniká, ak je  $\beta = n_2 k$ . Preto všetky body, ležiace pod touto hranicou, vyjadrujú v rovine vidových čísel vedené vidy. Predstava roviny vidových čísel umožňuje vypočítať celkový počet vedených vidov v OV. Pre každú dvojicu vidových čísel  $m$  a  $l$  zodpovedajúce elektromagnetické pole vidu môže mať azimutálnu závislosť v tvare  $\cos m \varphi$  alebo  $\sin m \varphi$  a môže existovať v dvoch polarizáciách. Preto degenerácia vidov je vo všeobecnosti štvornásobná (pre  $m = 0$  je len dvojnásobná). Ak definujeme hranicu vedených vidov ako funkciu  $l = f(m)$ , potom celkový počet vedených vidov je

$$M = 4 \int_0^{l_{\max}} f(m) dm \quad (2.6.16)$$

Použitím tejto rovnice môžeme ukázať, že celkový počet vedených vidov (tzv. **vidový objem gradientného OV**) je

$$M_s = \frac{\alpha}{\alpha + 2} (n_1 k a)^2 \Delta \quad (2.6.17)$$

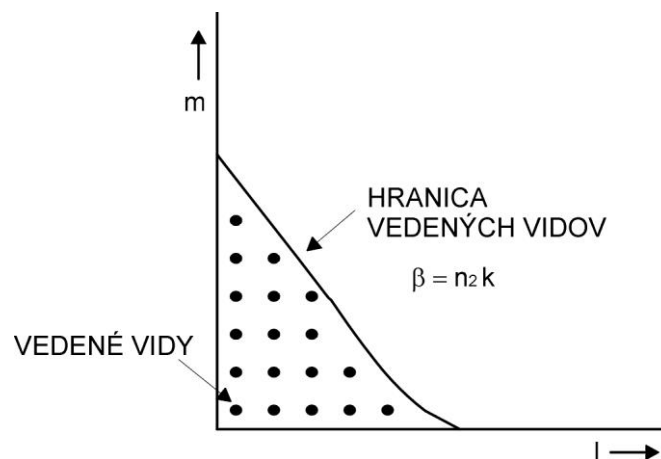
Ak uvažujeme  $\Delta \ll 1$ , potom použitím vzťahu (2.5.63) pre normovanú frekvenciu v možno ukázať, že platí

$$M_s \cong \frac{\alpha}{\alpha + 2} \frac{v^2}{2} \quad (2.6.18)$$

Teda v špeciálnom prípade parabolického profilu indexu lomu  $\alpha = 2$ , je počet vedených vidov

$$M_s \cong \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} M_s \quad (2.6.19)$$

kde sme použili vzťah (2.5.71). Počet vedených vidov je v gradientnom OV s parabolickým profilom indexu lomu ( $\alpha = 2$ ) polovičný, ako počet vedených vidov v stupňovitom OV ( $\alpha \rightarrow \infty$ ).



Obr. 2.25  
Geometrická reprezentácia vedených vidov  
v rovine vidových čísel  $m, l$ .

Gradientné OV môže byť tiež jednovidové, potom pre normovanú frekvenciu musí platiť

$$0 < v < v_c = 2,405 \sqrt{1 + \frac{\alpha}{2}} \quad (2.6.20)$$

Tento vzťah umožňuje určiť parametre GI – SM OV tak, aby bol splnený režim jednovidovej práce. Zo vzťahu (2.6.20) a (2.5.72) vidíme, že pre GI – SM OV s kvadratickým profilom indexu lomu je priemer jadra  $\sqrt{2}$  - krát väčší ako pre zodpovedajúce SI – SM OV. Možno tiež ukázať, že priemer jadra GI – SM OV možno zvýšiť až  $\sqrt{3}$  - krát pre OV s trojuholníkovým profilom indexu lomu ( $\alpha = 1$ ), čo sa v praxi používa pri prenose optických signálov s  $\lambda \cong 1,55 \mu\text{m}$ .