Nulové body prevádzkového činiteľa prenosu $G(p)$

Aby sme našli nulové body funkcie $G(p)$, musíme určiť nulové body fcie $G(p)\,G(-p)$, definovanej pre tento prípad rovnicou (12-80). Riešenie (12-80) musíme rozložiť na dva prípady, a to pre n-párne a n-nepárne. Pre n-párne dostávame:

$$1+\varepsilon^2 p^{2n}=0$$

$$p^{2n}=-\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$p^{2n}=\frac{1}{\varepsilon^2}e^{j(2k+1)\pi} \qquad k=0,1,2,3,\dots \qquad (12\text{-}86)$$

Riešení (12-86) potom dostaneme tieto výrazy:

$$p_k=\frac{1}{\varepsilon^{1/n}}e^{j\frac{2k+1}{2n}\pi} \qquad k=0,1,2,\dots,2n-1 \qquad (12\text{-}87)$$

resp.

$$p_k=\frac{1}{\varepsilon^{1/n}}\left[\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+j\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\right] \qquad (12\text{-}88)$$

Pre n-nepárne platí:

$$1-\varepsilon^2 p^{2n}=0$$

$$p^{2n}=\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$p^{2n}=\frac{1}{\varepsilon^2}e^{j2k\pi} \qquad k=0,1,2,3\dots \qquad (12\text{-}89)$$

Riešením rovnice (12-89) potom dostávame:

$$p_k=\varepsilon^{-\frac{1}{n}}e^{j\frac{k\pi}{n}} \qquad (12\text{-}90)$$

resp.

$$p_k=\varepsilon^{-\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+j\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]$$

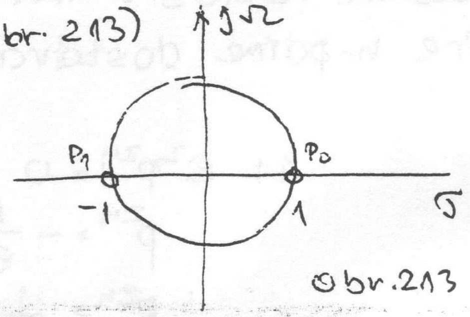
$$k=0,1,2,\dots,2n-1$$

Vyššie uvedené vzťahy aplikujme na nasledujúci príklad. Predpokladajme že $\varepsilon = 1$. Potom pre b_{max} platí:

$$b_{max} = \frac{1}{2}\ln(1+1) = \frac{1}{2}\ln 2 = 0.35\,Np = 3\,dB.$$

Z rovníc: (18-87) a (18-89) potom dostávame:

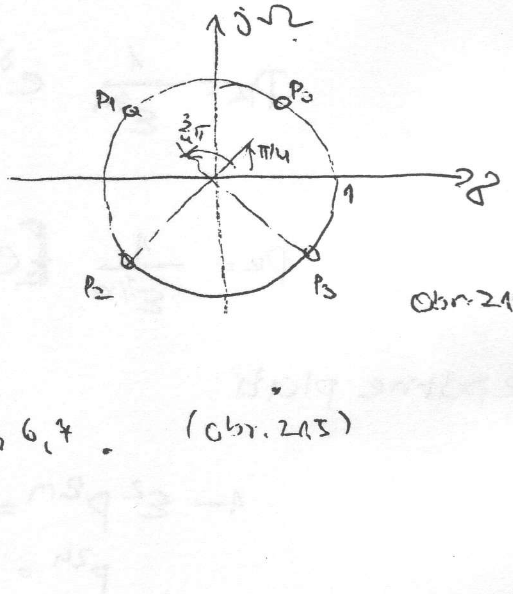
a) $n = 1$; $2n = 2$ $k = 0, 1$ (obr. 213)



Obr. 213

$$p_0 = \cos 0 + j\sin 0 = 1$$
$$p_1 = \cos \pi + j\sin \pi = -1$$

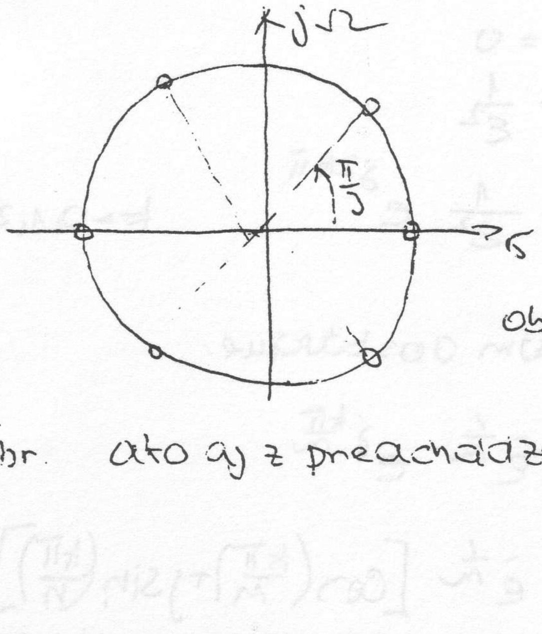
b) $n = 2$ $2n = 4$ $k = 0, 1, 2, 3$ obr. (214)



Obr. 214

$$p_0 = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = 0{,}707 + j\,0{,}707$$
$$p_1 = \cos\frac{3}{4}\pi + j\sin\frac{3}{4}\pi = 0{,}707 + j\,0{,}707$$
$$p_2 = \cos\frac{5}{4}\pi + j\sin\frac{5}{4}\pi = -0{,}707 + j\,0{,}707$$
$$p_3 = \cos\frac{7}{4}\pi + j\sin\frac{7}{4}\pi = 0{,}707 - j\,0{,}707$$

c) $n = 3$ $2n = 6$ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. (obr. 215)



Obr. 216.

Z uvedených obr. ako aj z predchádzajúcich rovníc možno formulovať tieto závery:

- funkcia $G(p)G(-p)$ môže mať korene reálne alebo komplexné, avšak nemôže mať rýdzoimaginárne korene.
- Korene sú rozložené na kružnici, s polomerom $\varepsilon^{1/n}$, so stredom v bode $p=0$.
- Korene sú rozložené symetricky k obidvom osám, pričom zvierajú uhol π/n.

…sledky obdržané v predchádzajúcom príklade, možno zrekapitulovať …učné rovnicami, napísanými v tvare súčinu koreňových činiteľov. …ada:

1 $$G(p)G(-p)=(p-p_0)(p-p_1) \qquad (12-91)$$

2 $$G(p)G(-p)=(p-p_0)(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3) \qquad (12-92)$$

3 $$G(p)G(-p)=(p-p_0)(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)(p-p_5) \qquad (12-93)$$

atď.

…časti 12.4.3. sme uviedli, že $G(p)$ má korene - nulové body len …ľavej polroviny. Potom vzhľadom na symetriu koreňov $G(p)G(-p)$, …ožno funkciu $G(p)$ obdržať tak, že uvažujeme len tie korene …$(p)G(-p)$, ktoré ležia v ľavej polrovine. Potom z rovníc (12-91)÷(12-93) …stanene:

$$(p)=(p-p_1)=p+1 \qquad n=1$$

$$(p)=(p-p_1)(p-p_2)=p^2+1{,}414422p+1 \qquad n=2$$

$$(p)=(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)=p^3+2p^2+2p+1 \qquad n=3$$

…ď.

…všeobecnosti dospejeme k mnohočlenu

$$G(p)=B_n(p)=b_n p^n+b_{n-1}p^{n-1}+\dots+b_2p^2+b_1p+b_0 \qquad (12-94)$$

$=1,\ b_0=1$

…orý sa nazýva Butterworthovým mnohočlenom n-tého stupňa. Butterworthove mnohočleny sú obyčajne tabelované pre …ax = 3dB ($\varepsilon=1$), a to vo forme polynómov, alebo vo forme …reňov týchto polynómov.

Realizácia filtra s max. plochou útl. charakteristikou

Obr.217.

Úloha realizácie reaktančnej dvojbrány podľa obr.217, ktorá je zakončená rezistorom R=1Ω, spočíva v nájdení štruktúry a prvkov, ktorá má prevádzkovú mieru prenosu G(p) a charakteristickú fciu φ(p). Syntéza takej dvojbrány môže byť založená na rozklade vstupnej impedancie

$$z_{vst} = \frac{Z_{vst}}{R_1} = \frac{G(p)+\varphi(p)}{G(p)-\varphi(p)} \qquad (12\text{-}95)$$

alebo jej zodpovedajúcej admitancii, do reťazového zlomku, s výslednou realizáciou v 1. Cauerovom kanonickom tvare. Tento postup si teraz naznačíme na niekoľkých príkladoch, pre rôzne n., kde

$$\varphi(p) = \pm p^n \qquad (12\text{-}96)$$

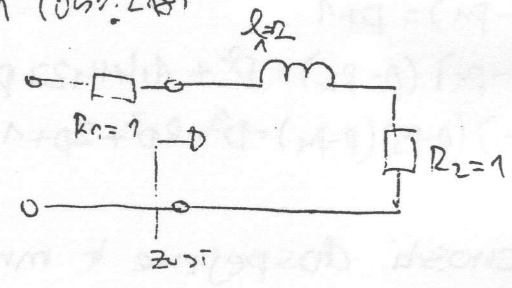
$$G_n(p) = G(p) \qquad (12\text{-}97)$$

$$\varepsilon = 1$$

1) $n=1;\quad G(p) = p+1 \qquad \varphi(p) = \pm p \qquad (12\text{-}98)$

a)

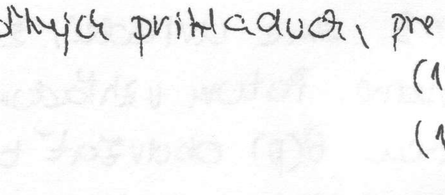
$$z_{vst} = \frac{G(p)+\varphi(p)}{G(p)-\varphi(p)} = \frac{p+1+p}{p+1-p} = 2p+1 \quad \text{(obr. 218)}$$



b)

$$z_{vst} = \frac{p+1-p}{p+1+p} = \frac{1}{2p+1}$$

$$y_{vst} = 2p+1 \qquad \text{(obr. 219)}$$



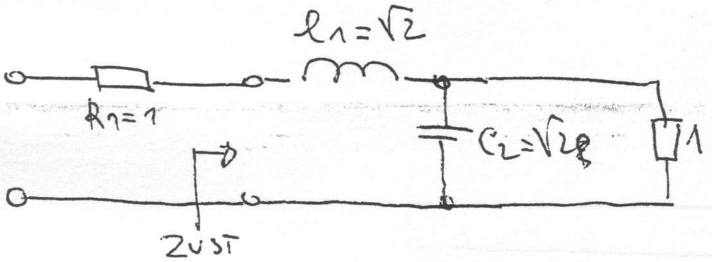
Obr.220.

!) $n=2$ $\qquad G(p)=1+\sqrt{2}p+p^2 \qquad \varphi(p)=\pm p^2$

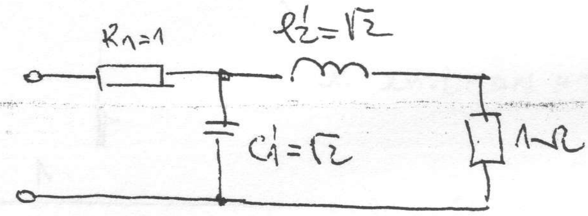
a) $\varphi(p)=p^2$

$$z_{vst}=\frac{1+\sqrt{2}\,p+p^2+p^2}{1+\sqrt{2}p}=\frac{2p^2+\sqrt{2}\,p+1}{\sqrt{2}\,p+1}=p\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}p+1} \qquad \text{(obr. 221)}$$

$$y_{vst}=\frac{\sqrt{2}\,p+1}{p^2+\sqrt{2}p+1}=\sqrt{2}p+\frac{1}{\sqrt{2}p+1} \qquad \text{(obr.222)}$$



Obr.221

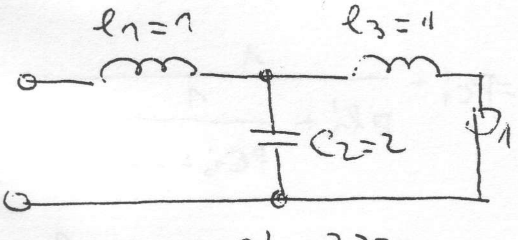


Obr. 222

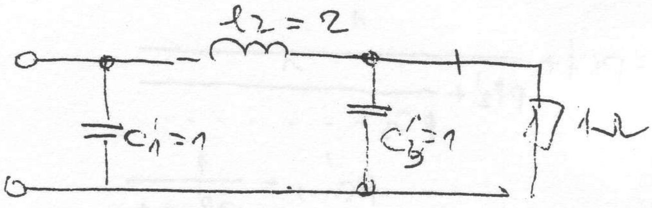
). $n=3$ $\qquad G(p)=1+2p+2p^2+p^3 \qquad \varphi(p)=\pm p^3$

a) $\varphi(p)=p^3$ $\qquad z_{vst}(p)=p+\cfrac{1}{2p+\cfrac{1}{p+1}}$ $\qquad$ (Obr.223)

b) $\varphi(p)=-p^3$ $\qquad y_{vst}(p)=p+\cfrac{1}{2p+\cfrac{1}{p+1}}$ $\qquad$ (Obr.224)



Obr.223



Obr.224

. dosiaľ uvedených príkladov sú už zrejmé všeobecné zákonitosti k realizácii bezstratových filtrov ak použijeme $\varphi(p) = +p^{n}$, tak $z_{vst}(p)$ možno vyjadriť v tomto tvare:

~~(pre párne) pre~~ a, pre párne n:

$$z_{vst}(p) = pl_1 + \cfrac{1}{pc_2 + \cfrac{1}{pl_3 + \cfrac{1}{pc_4 + \cdots \, \cfrac{}{\ddots \, \cfrac{1}{pc_{n-1} + \cfrac{1}{pl_n + 1}}}}}} \qquad (12-99)$$

b, pre nepárne n:

$$z_{vst}(p) = pl_1 + \cfrac{1}{pc_2 + \cfrac{1}{pl_3 + \cfrac{1}{pc_4 + \cdots \, \cfrac{1}{pl_{n-1} + \cfrac{1}{pc_n + 1}}}}} \qquad (12-100)$$

ak použijeme charakteristickú fciu $\varphi(p) = -p^{n}$, tak má admitančná fcia rozvinutá do reťazového zlomku tento tvar:

a, n - párne:

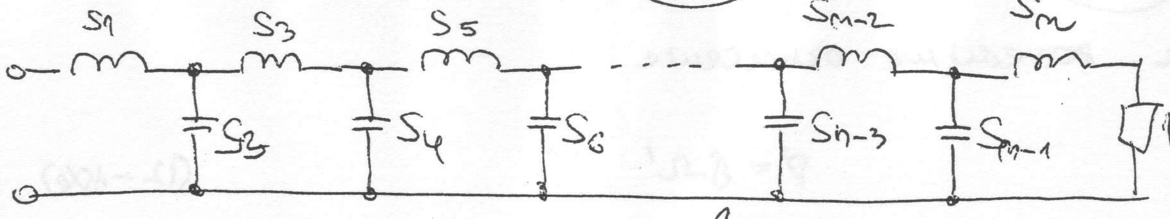
$$Y_{vst}(p) = pc_1' + \cfrac{1}{pl_2' + \cfrac{1}{pc_3' + \cdots \, \cfrac{}{pc_{n-1}' + \cfrac{1}{pl_n + 1}}}} \qquad (12-101)$$

b, n - nepárne

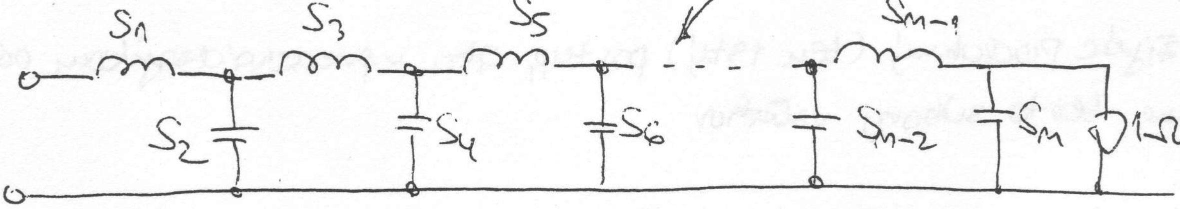
$$Y_{vst}(p) = pc_1' + \cfrac{1}{pl_2' + \cfrac{1}{pc_3' + \cdots \, \cfrac{}{pl_{n-1}' + \cfrac{1}{pc_n' + 1}}}} \qquad (12-102)$$

[illegible]rniciam (12-99) ÷ (12-102) možno priradiť zapojenie priechových normovaných DP podľa obr. 225 - obr. 228. Ak sa pozrieme bližšie na obr. , k [illegible], pre realizáciu zvst pre n=1, 2, 3, ... atď, vidíme, že $l_1 = c$ [illegible] $l_1' = c_2$. Preto sú stavebné prvky označené symbolom S_i. Parametre [illegible] prvkov pri [illegible] [illegible] v tabuľkách.

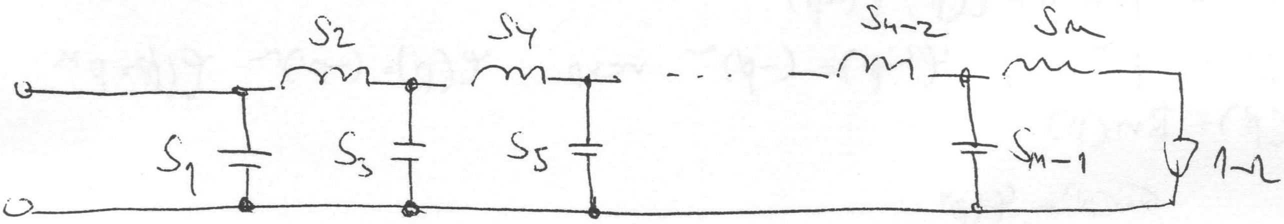
r. 225.



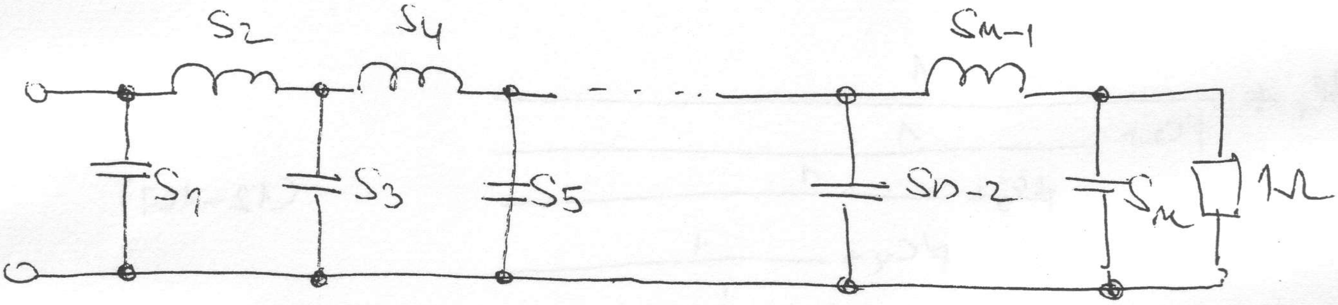
br. 226.



r. 227



r. 228



Niektoré poznámky k návrhu Bw filtrov.

Nech $\varepsilon \neq 1$! Zaoberajme sa prevádzkovým útlmom bezstratovej dvojbrany pre prípad $\varepsilon \neq 1$. Potom môžeme urobiť nasledujúce úpravy.

$b(\Omega) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}\right)$

$b(\Omega) = \frac{1}{2} \ln \left[1 + (\varepsilon^{1/n} \Omega)^{2n}\right]$; (12-103')

Zavedením substitúcie

$\Omega' = \varepsilon^{1/n} \Omega$ (12-104)

Potom dostávame:

$b(\Omega') = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \Omega'^{2n}\right]$ (12-105)

(201)

a teraz zavedieme označenie

$$p' = j\Omega' \qquad (12-106)$$

tak použijúc podobný (ten istý) postup, ako v predchádzajúcom odseku, dostávame tieto súbory vzťahov

$$G(p')\,G(-p') = 1 + \varphi(p')\,\varphi(-p')$$

$$\varphi(p') = p'^n \;;\quad \varphi(-p') = (-p')^n \quad \text{resp.} \quad \varphi(p') = (-p')^n \quad \varphi(p') = p^n$$

$$G(p') = B_n(p')$$

$$z_{vst} = \frac{G(p') + \varphi(p')}{G(p') - \varphi(p')} =$$

$$= p'l_1 + \cfrac{1}{p'C_2 + \cfrac{1}{p'l_3 + \cfrac{1}{p'C_4 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{p'C_{n-1} + \cfrac{1}{p'l_n' + 1}}}}}} \qquad (12-107)$$

(pre n-nepárne),

a tak.

Vzťah (12-106), možno ďalej upraviť takto:

$$p' = j\Omega' = j\,\varepsilon^{1/n}\Omega = \varepsilon^{1/n}(j\Omega) = \varepsilon^{1/n}p \qquad (12-108)$$

Dosadením (12-108) do (12-107) dostávame:

$$z_{vst} = p(\varepsilon^{1/n}l_1) + \cfrac{1}{p(\varepsilon^{1/n}C_2) + \cfrac{1}{p(\varepsilon^{1/n}l_3) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{p(\varepsilon^{1/n}C_{n-1}) + \cfrac{1}{p(l_n\varepsilon^{1/n}) + 1}}}}} = pL_1 + \cfrac{1}{pC_2 + \cfrac{1}{pL_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{pC_{n-1} + \cfrac{1}{pL_n + 1}}}}}$$

(12-109)

Zo vzťahu (12-109) plynú nasledujúce rovnosti:

$$L_i = \varepsilon^{1/n} l_i \qquad (12-110)$$

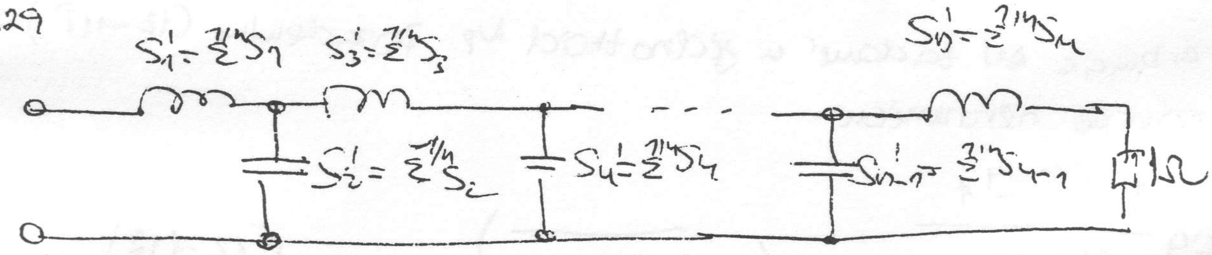
$$C_i = \varepsilon^{1/n} c_i \qquad (12-111)$$

Vzhľadom na to, že hodnoty parametrov prvkov bezstratovej dvojbrány sú označované ako $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$, tak pri známej súvislosti medzi l_i, c_i a S_i, možno napísať túto rovnicu:

$$S_i' = \varepsilon^{1/n} S_i \qquad (12-112)$$

Uvedeného potom plynie realizácia filtra pre $\varepsilon \neq 1$ na základe parametrov i, získaných v tabuľke. Na obr. 229 je naznačená realizácia zvlášť pre ne n párne s $\varepsilon \neq 1$.

Obr. 229



Poznámka (2). – jednotky útlmu sú dB.

Pri definovaní požiadaviek na vlastnosti filtrov sú parametre b_{max} a b_{min}, obyčajne zadávané v jednotke dB, a nie v jednotke Np, ako sme až doteraz uvažovali. Preto v ďalšej časti našej prednášky uvádzame vzťah pre výpočet tzv. rádu, v ktorom sú parametre b_{max} a b_{min} definované v jednotke dB.

Nech b^{dB} vyjadruje ~~tenisté dB~~ v jednotke dB, ako b^{Np} v jednotke Np. Potom platia nasledujúce rovnice:

$$b^{Np} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow e^{2b^{Np}} = \frac{P_1}{P_2} \qquad (113)$$

$$b^{dB} = 10 \log \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow 10^{0{,}1 b^{dB}} = \frac{P_1}{P_2} \qquad (114)$$

Zo vzťahov (12–113) a (12–114) plynie tento vzťah

$$e^{2b^{Np}} = 10^{0,1 b^{dB}} \qquad (12-115)$$

Zrejmé, že (12-115) platí pre všetky hodnoty útlmu, a teda i pre b_{MAX}, a b_{min} a preto budú platiť i tieto vzťahy:

$$e^{2b_{max}^{Np}} = 10^{0,1 b_{MAX}^{dB}} \qquad e^{2b_{min}^{Np}} = 10^{0,1 b_{min}^{dB}} \qquad (12-115)$$

Z predchádzajúcich úvah vieme, že pre rád filtra n, musí vyhovovať rovnici

$$n \geq \frac{\log \dfrac{e^{2b_{min}}-1}{e^{2b_{max}}-1}}{2 \log \Omega_z} \qquad (12-116)$$

kde b_{min} a b_{max} sú zadané v jednotkách Np. Dosadením (12–115) do (12–116) dostávame nerovnicu

$$n \geq \frac{\log \dfrac{10^{0,1 b_{min}}-1}{10^{0,1 b_{max}}-1}}{2 \log \Omega_z} \quad \left(\varepsilon = \sqrt{10^{0,1 b_{max}}-1}\right) \qquad (12-117)$$

ktorej musí vyhovovať rád filtra n, kde b_{min} a b_{max} sú zadané v jednotkách dB.

Poznámka 3: Príklad návrhu bezstratového filtra.

Navrhnite filter s maximálne plochou útlmovou charakteristikou, ak $b_{MAX} = 1\,dB$ a $b_{min} = 25\,dB$. Priepustné pásmo je do MHz, nepriepustné pásmo od ? MHz. Vnútorný odpor zdroja napäťového signálu R_1 a odpor záťaže sú rovnaké, pričom platí $R_1 = R_2 = 470\,k\Omega$.

(210)

Riešenie:

1) $\varepsilon = \sqrt{10^{0,1 b_{max}} - 1} = \sqrt{10^{0,1} - 1} = 0.5088$

2) $\Omega_2 = \frac{6}{4} = 1,5 \qquad \Omega_1 = 1!$

3) $$n \geq \frac{\log \frac{10^{0,1 b_{min}} - 1}{10^{0,1 b_{max}} - 1}}{2 \log \Omega_2} = \frac{\log \frac{10^{0,1 \cdot 25} - 1}{10^{0,1 \cdot 1} - 1}}{2 \log 1,5} = 8,6!$$

volíme: $\underline{n = 9}$

4) Z tabuľky zisťujeme:

$S_1 = 0,347 \qquad S_4 = 1,879 \qquad S_7 = 1,532$

$S_2 = 1 \qquad S_5 = 2 \qquad S_8 = 1$

$S_3 = 1,532 \qquad S_6 = 1,879 \qquad S_9 = 0,347$

5) $\varepsilon^{1/n} = \sqrt[9]{\varepsilon} = \sqrt[9]{0,5088} = 0,9276 \quad ; \quad S_i' = \varepsilon^{1/n} S_i$

$S_1' = 0,3218 \qquad S_4' = 1,7429 \qquad S_7' = 1,421$

$S_2' = 0,9276 \qquad S_5' = 1,8552 \qquad S_8' = 0,9276$

$S_3' = 1,421 \qquad S_6' = 1,7429 \qquad S_9' = 0,3218$

6) Impedančné a frekvenčné odnormovanie: $\omega_0 = 2\pi \cdot 4 \cdot 10^3$ rad/s

$R_0 = 470$

$$L_k = l_k \frac{R_0}{\omega_0} = l_k \cdot \frac{470}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^3} = 1,87 \cdot 10^{-2} l_k$$

$$C_k = \frac{c_k}{\omega_0 R_0} = \frac{c_k}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 470} = 8,465 \cdot 10^{-8} c_k$$

Nech $S_1' = c_1$, pretože n je nepárne, potom platí:

$C_1 = C_9 = 8{,}465 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}3218 = 27{,}24\,nF$

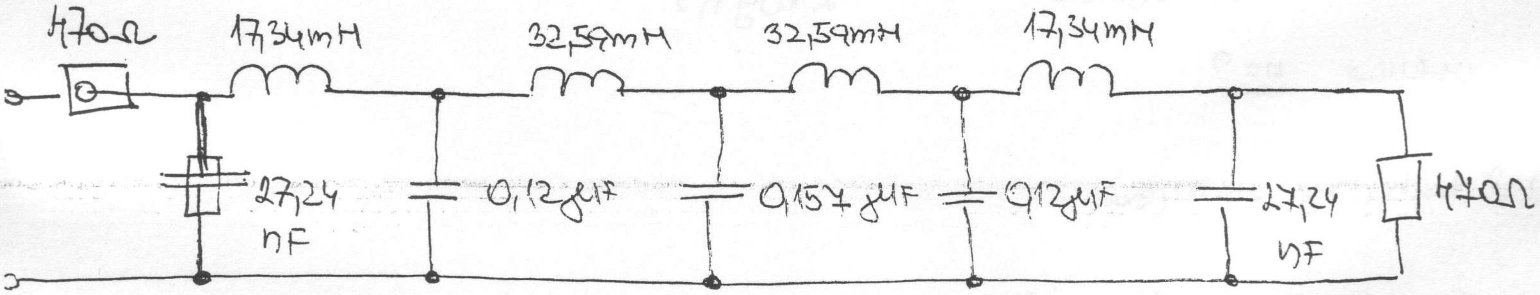
$C_3 = C_5 = 8{,}465 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}421 = 0{,}12\,\mu F$

$C_5 = 8{,}465 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}8552 = 0{,}157\,\mu F$

$L_2 = L_8 = 1{,}87 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}9276 = 17{,}34\,mH$

$L_4 = L_6 = 1{,}87 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}7429 = 32{,}59\,mH$

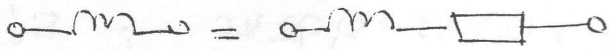
7. Realizácia:

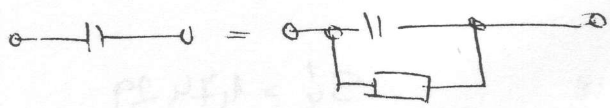


obr. 227

8. Poznámky:

Pri realizácii si je potrebné uvedomiť 2 skutočnosti.

I). a. reálna cievka 

b. reálny kondenzátor 

II). Hodnoty indukčnosti možno stanoviť meraním, a vhodným navíjaním cievky

Hodnoty kapacitorov však presne zvolené byť nemôžu, vzhľadom na rady kapacít a toleranciu kapacít.

Vzhľadom na I a II, bude vhodné previesť predbežnú analýzu vlastností výpočtom (ručným), alebo metódami CAD (napr. použitím SPICE).

vzťah:

$$G(p)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,G_u(p) \qquad (12-118)$$

amplitúdovej frekvenč. charakteristiky.

kde

$$G_u(p)=\frac{U_1(p)}{U_2(p)} \qquad (12-119)$$

pričom $U_2(p)$ je na zaťažovacom rezistore a $U_1(p)$ je napätie na zdroji signálu. Z rovnice (11-118), možno vyjadriť tiež prenos napätia $H(p)=U_2(p)/U_1(p)$, v tejto forme:

$$H(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{1}{G_u(p)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,\frac{1}{G(p)} \qquad (12-120)$$

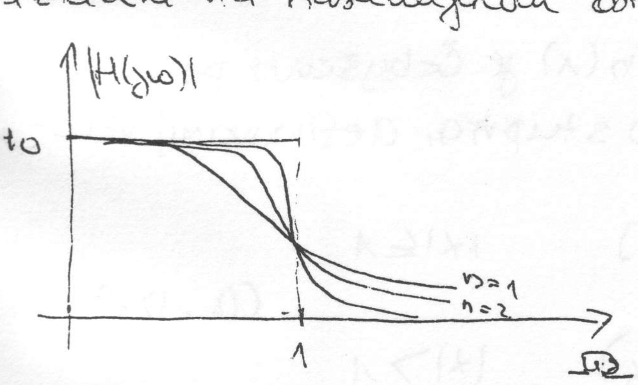
Zavedením označenia

$$H_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \qquad (12-121)$$

možno (12-120) zapísať takto:

$$H(p)=\frac{H(0)}{G(p)} \qquad (12-12i)$$

Prenosové (amplitúdové) charakteristiky zodpovedajúce fci $|H(j\omega)|$ sú znázornené na nasledujúcom obr. (obr. 230). Z uvedeného je zrejmé, že



Obr.230.

tieto charakteristiky zodpovedajú amplitúdovým frekvenčným charakteristikám normovaného dolného priepustu. H_0 je obyčajne zvolené tak, aby platilo

$$H(j\Omega)\Big|_{\Omega=0}=1 \qquad (12-122)$$

Nakoľko

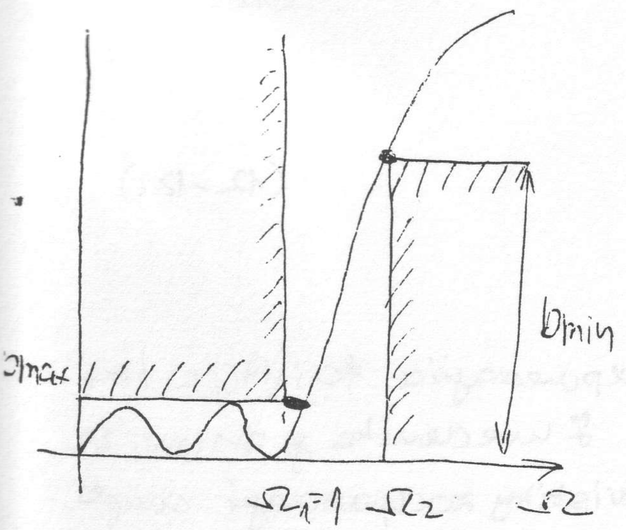
$$B_n(j\Omega)\Big|_{\Omega=0}=1 \qquad (12-123)$$

volíme $H_0=1$. Potom vzťah (12-121) možno zapísať takto

$$H(p)=\frac{1}{G(p)}=\frac{1}{B_n(p)} \qquad (12-124)$$

Posledný vzťah nám ukazuje, že prenosovú fciu normovaného DP filtra, možno odvodiť tak, že sa rovná prevrátenej hodnote prevádzkovej miery prenosu $G(p)$. Prenosové funkcie iných typov filtrov (napr. DP, HP, PP a PZ) možno potom odvodiť z $H(p)$ vhodnou frekvenčnou transformáciou. Výhodou takéhoto stanovenia prenosovej fcie spočíva v tom, že táto prenosová fcia je možné realizovať i inými metódami a to veľmi často efektívnejšími metódami ako sú pasívne bezstratové filtre. Tu ako príklad možno uviesť použitie RC filtrov - realizovaných pomocou IOZ, filtre na báze spínaných kapacitorov alebo komerčne vyrábané filtre vo forme IO, majúce základné charakteristiky - (tu máme na mysli charakteristiky aproximácie) ako filtre bezstratové.

12.4.5 Filtre s izoextremálnou charakteristikou v priepustnom pásme (Čebyšev)



Obr. 231.

V prípade aproximácie útlmovej charakteristiky s izoextremálnou aproximáciou v priepustnom pásme pre útlm normovaného DP platí (obr. 231.):

$$D = \frac{1}{2}\ln\left[1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)\right] \qquad (12-125)$$

kde $T_n(x)$ je Čebyševov polynóm n-tého stupňa, definovaný vzťahom:

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos[n(\cos^{-1} x)] & |x| \le 1 \\ \cosh(n \cosh^{-1} x) & |x| > 1 \end{cases} \qquad (12-126)$$

Z predošlého vzťahu plynie, že:

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x \; \ldots$

Da sa ukázať, že $T_m(x)$ možno generovať použitím týchto rekurzívnych vzťahov:

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad \text{pre } n = 1,2,3,\dots \qquad (12-127)$$

Zo vzťahu (12-125) vidíme, že pre charakteristickú funkciu platí:

$$\varphi(p) = \varepsilon\, T_m(-p) \qquad (12-128)$$

$$\varphi(j\Omega) = \varepsilon\, T_n(j\Omega) \qquad (12-129)$$

Pritom pre prevádzkovú mieru prenosu platí:

$$G(p)\,G(-p) = 1 + \varepsilon^2\, T_m(p)\, T_n(-p) \qquad (12-130)$$

Pretože platí: $T_n(1) = 1$ (12-131)

pre $\Omega = 1$, možno (12-125), zapísať v tejto forme:

$$b_{MAX} = \frac{1}{2} \ln (1 + \varepsilon^2) \qquad (12-132)$$

Odkiaľ pre ε platí:

$$\varepsilon = \sqrt{e^{2b_{max}} - 1} \qquad \left(\sqrt{e^{2b_{max}} - 1}\right) \qquad (12-133)$$

Na základe vzťahu (12-125), pri využití niektorých vlastností Čebyševových polynomov, možno ukázať, že pre požadovaný rád filtra musí platiť nerovnosť:

$$n \geq \frac{\log \sqrt{\dfrac{e^{2b_{min}} - 1}{e^{2b_{max}} - 1}} + 0{,}3}{\log \Omega_2 + 0{,}3} \qquad (12-144).$$

Nulové body funkcie $G(p)$ $G(-p)$ sú rozložené na elipse, ktorá je daná rovnicou:

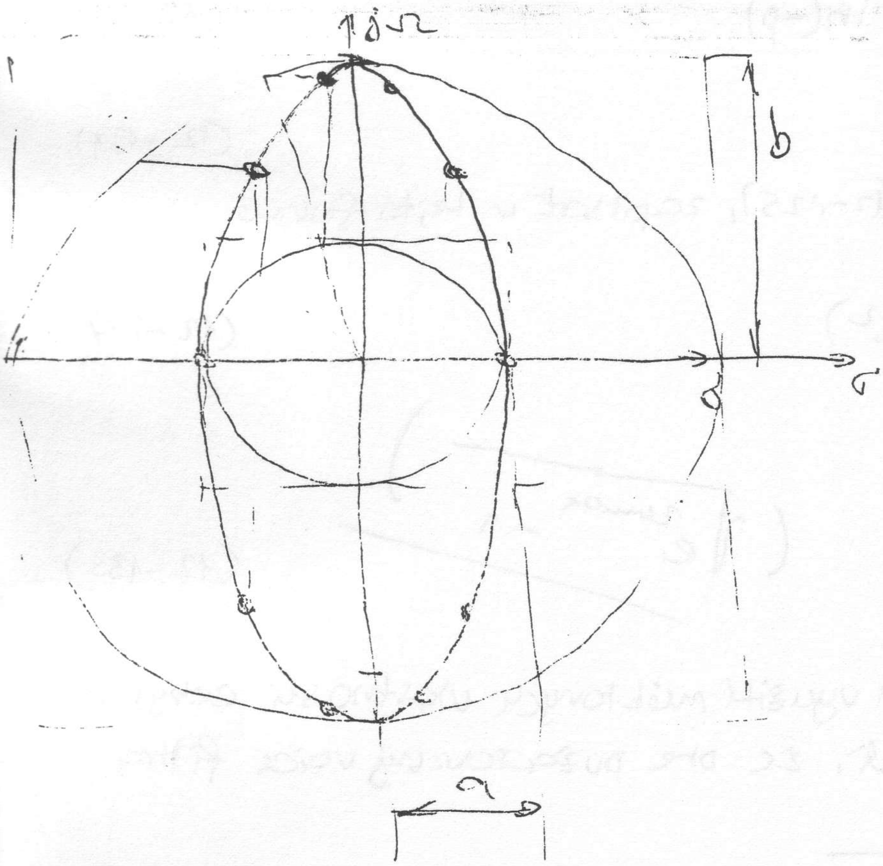
$$\frac{\sigma_k^2}{\sinh^2\left(\frac{1}{n}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{\varepsilon}\right)} + \frac{\Omega_k^2}{\cosh^2\left(\frac{1}{n}\operatorname{arcsinh}\frac{1}{\varepsilon}\right)} = 1 \qquad (12-145)$$

(16). (21b)

Nulové body funkcie $G(p)$, sú to body $p_k = \sigma_k + j\Omega_k$ $k = 0, 1, 2, \dots m$ ak z týchto bodov uvážime, tie, ktoré ležia v ľavej polrovine, ~~[illegible]~~, tak možno nájsť mnohočlen

$$G(p) = C_n(p) = C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + \dots + C_n p^m \qquad (12-146)$$

Tieto mnohočleny sú uvádzané v tabuľkách, pre rôzne hodnoty ε ~~pre~~ / b_{max} a rôzne n. Vychádzajúc z $C_n(p)$ a $\varphi(p)$, možno použitím podobného postupu ako v prípade Butterworthových filtrov, navrhnúť i realizáciu filtrov Čebyševových. Bezstratové pasívne realizácie ČF sú opäť tabelované, pre prípad normovaného DP, a rôzne ε a m. Pri ich návrhu postupujeme podobne, ako v prípade Butterworthových filtrov.



Obr. 232.

Samyng 6.7ro.

2/16

$b = \frac{1}{2} \ln\left[1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)\right]$

$b_{max} = \frac{1}{2} \ln\left[1 + \varepsilon^2\right]$; $e^{2b_{max}} - 1 = \varepsilon^2$; $\varepsilon = \sqrt{e^{2b_{max}} - 1}$

$b_{min} \leqq \frac{1}{2} \ln\left[1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)\right]$

$e^{2b_{min}} - 1 \leqq \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)$

$$T_n^2(\Omega) \geqq \frac{e^{2b_{min}} - 1}{e^{2b_{max}} - 1}$$

$T_n(\Omega) \geqq \sqrt{\frac{e^{2b_{min}} - 1}{e^{2b_{max}} - 1}}$; $\frac{1}{2}(2\Omega)^n \geqq \sqrt{}$

$\cosh\left[n \operatorname{argcosh} \Omega_2\right] \geqq \sqrt{\frac{e^{2b_{min}} - 1}{e^{2b_{max}} - 1}}$ $\quad n(2\Omega)^n \geqq \log\sqrt{} + \log 2$

$$n \geqq \frac{\operatorname{argcosh}\sqrt{\frac{e^{2b_{min}} - 1}{e^{2b_{max}} - 1}}}{\operatorname{argcosh} \Omega_2}$$

$$n \geqq \frac{\log\sqrt{} + \log 2}{\log \Omega_2 + \log 2} = \frac{\log\sqrt{} + 0{,}3}{\ln \Omega_2 + 0{,}3}$$

$T_n(\Omega) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

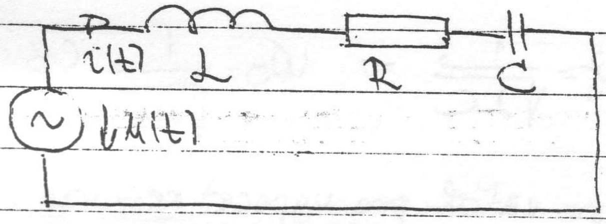
$T_2(x) = 2x T_1(x) - T_0(x) = 2x \cdot x - 1 \approx 2x^2$

$T_3(x) = 2x T_2(x) - T_1(x) \approx 2x \, 2x^2 - x \approx 4x^3$

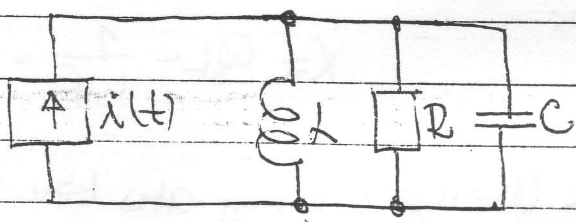
$T_n(x) = 2^{n-1} x^n$; $T_n(x) = 2^{n-1} \Omega^n = \frac{1}{2}(2\Omega)^n$

13. Rezonančné obvody

Rezonančný obvod tvorí určité zapojenie cievky a kondenzátora. Pretože reálna cievka má vždy stratový odpor, resp. reálny kondenzátor môže mať určitý zvodový odpor, modelujeme reálny rezonančný obvod pomocou ideálneho rezistora, kapacitora a induktora. Ak sú tieto prvky zapojené do série, hovoríme o sériovom rezonančnom obvode (obr. 233), ak sú zapojené paralelne, hovoríme o paralelnom rezonančnom obvode (obr. 234.).



Obr. 233



Obr. 234.

13.1. Sériový rezonančný obvod

Uvažujme SRO podľa obr. 233. Potom pre impedanciu obvodu platí:

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}, \qquad (13-1)$$

Pre $p = j\omega$ dostaneme:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |Z| e^{j\varphi} \qquad (13-2)$$

$$|Z(j\omega)| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} \qquad (13-3)$$

Ak pre vstupné napätie $u(t)$ platí:

$$u(t) = U\cos(\omega t + \psi) \qquad (13-4)$$

tak pre okamžitú hodnotu prúdu

$$i(t) = \frac{U}{|Z|}\cos(\omega t + \psi - \varphi) \qquad (13-5).$$

3.1.1. Sériová rezonancia

O sériovej rezonancii SRO hovoríme vtedy, ak jeho reaktancia X je nulová, t. j.

$$\left.\begin{array}{l} Z = R + jX \\ X = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r}(13-6)\\(13-7)\end{array}$$

t. j. v rezonancii platí

$$Z_r = R \qquad (13-8)$$

Z podmienky (13-7) môžno vypočítať rezonančnú frekvenciu ω_0 takto:

$$X = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (13-9)$$

Vzťah (13-9) je známy ako tzv. Thomsonov vzťah pre výpočet rezonančnej frekvencie SRO. Pri rezonancii preteká obvodom najväčší prúd, ktorého amplitúda je:

$$I_r = \frac{U}{R} \qquad (13-10)$$

pričom pre amplitúdu napätia na rezistore R platí:

$$U_R = \frac{U}{R} R = U \qquad (13-11)$$

Pre napätia na L a C platí:

$$U_{Lr} = j\omega_0 L I_r = j\frac{\omega_0 L}{R} U \qquad (13-12)$$

$$U_{Cr} = \frac{1}{j\omega_0 C R} U = -j\frac{1}{\omega_0 C}\frac{U}{R} \qquad (13-13)$$

Nakoľko platí (13-9), tak

$$|U_{Lr}| = |U_{Cr}| = \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right) \cdot U_r = \left(\frac{1}{\omega_0 R C}\right) U_r \qquad (13-14)$$

3.1.2 Činiteľ akosti SRO

Činiteľ akosti SRO je definovaný vzťahom

$$Q = \frac{\omega_0 A}{P} \qquad (13-15)$$

kde A je energia, ktorá prechádza z el. poľa SRO do magnetického poľa a P je činný výkon, ktorý sa na rezistore R premieňa na teplo.

Využijúc takéto definície A a P, možno činiteľ akosti SRO vypočítať takto:

$$Q=\frac{\omega_0 A}{P}=\frac{\omega_0 \frac{1}{2}LI^2}{\frac{1}{2}RI^2}=\frac{\omega_0 L}{R} \qquad (13-16)$$

Pri použití vzťahu (13-9) možno (13-16) vyjadriť tiež v tejto forme:

$$Q=\frac{1}{\omega_0 C R} \qquad (13-17)$$

Dosadením za výrazy $\frac{\omega_0 L}{R}$ resp. $\frac{1}{\omega_0 C R}$ do (13-14) vidíme, že platí:

$$|U_L|=|U_C|=QU_r=QU$$

t.j. amplitúdy napätí na L a C sú pri rezonancii Q-krát väčšie, ako amplitúda napätia napájacieho zdroja.

Prevrátenú hodnotu činiteľa akosti označujeme symbolom d. Táto veličina sa nazýva činiteľom tlmenia. Potom pre d platí:

$$d=\frac{1}{Q}=\frac{R}{\omega_0 L}=\omega_0 C R \qquad (13-18)$$

Rozladenie, činiteľ rozladenia, stupeň rozladenia

Odchýlku rezonančnej frekvencie od frekvencie nazývame rozladením. Označujeme ho symbolmi Δf resp. $\Delta\omega$. Je to tzv. absolútne rozladenie. Hodnotu $\Delta f/f_0$ resp. $\Delta\omega/\omega_0$ nazývame relatívnym rozladením. Pre impedanciu SRO, možno ~~za~~ pri zavedení týchto veličín potom písať:

$$Z(j\omega)=R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)=R+j\omega_0 L\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{1}{\omega_0 \underbrace{LC}_{\omega_0^2}\omega}\right)=$$

$$=R+j\omega_0 L\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0^2}{\omega_0\omega}\right)=R\left[1+j\frac{\omega_0 L}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \qquad (13-19)$$

t.j.

$$Z(j\omega)=R\left[1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \qquad (13-20)$$

Výraz $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = F$ (13-21)

nazývame činiteľom rozladenia, pričom súčin

$$\xi = Q.F \qquad (13-22)$$

nazývame stupňom rozladenia. Potom pre impedanciu SRO platí:

$$Z = R[1+jFQ] = R(1+j\xi) = |Z| e^{j\varphi} \qquad (13-23)$$

Z čoho pre ξ plynie: $\xi = tg\,\varphi$ (13-24)

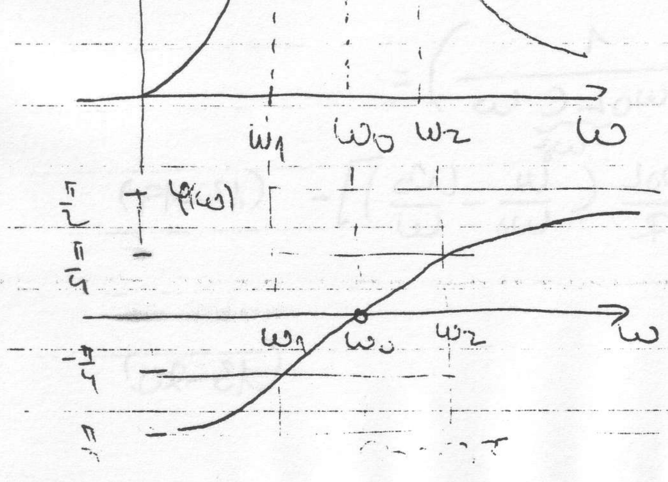
13.1.4. Rezonančné krivky SRO

Pre prúd I, tečúci SRO, platí:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega L})} = I e^{j(\psi - \varphi)} \qquad (13-25)$$

Závislosti $|I|$ na ω hovoríme rezonančná krivka. Je daná rovnicou

$$|I| = \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \qquad (13-26)$$



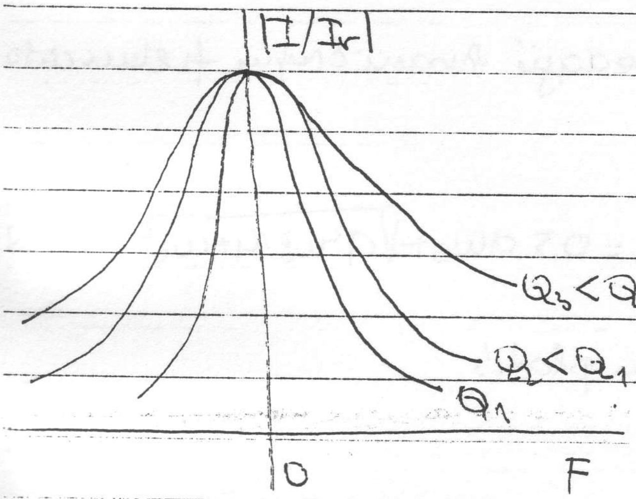
pričom je naznačená na obr. 235. Rezonančná krivka podľa obr. 235 platí len pre jeden obvod, s konkrétnymi hodnotami L, R, C. Výhodnejšie je vyjadriť I pomocou parametrov Q a F, t.j. platí:

$$I = \frac{U}{R(1+jQF)} \qquad (13-27)$$

Z čoho dostávame

$$\left|\frac{I}{I_r}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2F^2}} \qquad (13-28)$$

Sústava takýchto kriviek je naznačená na obr. 236. pre rôzne hodnoty Q. Z tohoto obr. vidíme, že čím je väčší činiteľ akosti, tým je rezonančná krivka užšia.



Obr. 236.

13.1.5. Prepustné pásmo SRO

RO sa obyčajne používa ako pásmový prepust. Za prepustné pásmo SRO, považujeme taký interval frekvencií, v okolí rezonančnej frekvencie, aby pri medzných (hraničných) frekvenciách sa reaktancia obvodu rovnala jej činnému odporu. Argument impedancie je v tomto prípade $\varphi = 45°$, ak platí: $X = R$ (13-29)

tak:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} \quad (13\text{-}30)$$

a teda:

$$|I^*| = \left|\frac{U}{Z}\right| = \left|\frac{U}{R\sqrt{2}}\right| = \frac{Ir}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, Ir \quad (13\text{-}31)$$

Symbol I^* označuje prúd na hranici prepustného pásma. Vyjadríme pomer $|I/Ir|$ v dB, dostaneme,

$$20 \log |I/Ir| = 20 \log |1/\sqrt{2}| = -3\,dB \quad (13\text{-}32)$$

Z toho je zrejmé, že na hranici prepustného pásma je dovolený útlm -3dB. Pre hraničnú frekvenciu prepustného pásma potom platí:

$$\frac{I^*}{Ir} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^{*2}}} \Rightarrow \xi^{*2} = 1 \Rightarrow \quad (13\text{-}33)$$

a teda

$$\xi^{b*} = QF^* \Rightarrow F^* = \pm \frac{1}{Q} = \pm d = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \quad (13\text{-}34)$$

Z (13-34) dostávame kvadratickú rovnicu

$$\omega^2 - d\omega\omega_0 - \omega_0^2 = 0 \quad (13\text{-}35)$$

Zo 4 koreňov (13-35)

$$\omega_{1,2,3,4} = \pm 0{,}5\, d\omega_0 \pm \sqrt{d^2\omega_0^2/4 + \omega_0^2} \qquad (13\text{-}36)$$

vezmeme kladné hodnoty, ktoré zodpovedajú hraničným frekvenciám priepustného pásma ω_1 a ω_2 t.j.:

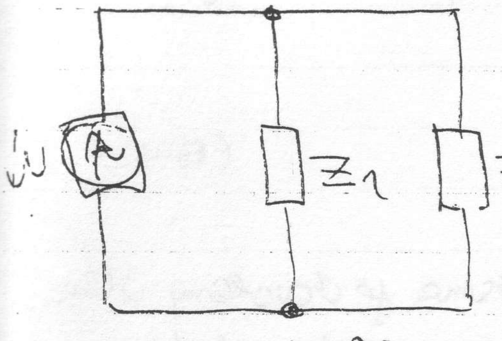
$$\omega_1 = -0{,}5\, d\omega_0 + \sqrt{d^2\omega_0^2/4 + \omega_0^2} \qquad \omega_2 = 0{,}5\, d\omega_0 + \sqrt{d^2\omega_0^2/4 + \omega_0^2} \quad (13\text{-}37)$$

pre šírku prepustného pásma BW ($\Delta\omega^*$) potom platí:

$$\Delta\omega^* = \omega_2 - \omega_1 = d\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$$

t.j. $\Delta\omega^* = \dfrac{\omega_0}{Q}$ resp. $\Delta\omega^* = \omega_0 d$ (13-37).

13.2 Paralelný rezonančný obvod.



obr.237

Uvažujme, že k ideálnemu zdroju napätia $u(t) = |U|\cos(\omega t + \psi)$ sú pripojené dve impedancie Z_1 a Z_2 podľa obr.237. Nech pre Z_1 a Z_2 platí:

$$Z_1 = R_1 + jX_1 \qquad (13\text{-}38)$$

$$Z_2 = R_2 + jX_2 \qquad (13\text{-}39)$$

Pre výslednú impedanciu pripojenú k u(t) potom platí:

$$Z_N = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = R_N + jX_N \qquad (13\text{-}40)$$

Impedanciu Z_N možno vyjadriť v tejto forme.

$$Z_N = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)} = \frac{R_1R_2 + jX_1R_2 + jX_2R_1 - X_1X_2}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)}$$

+

$$= \frac{[(R_1R_2 - X_1X_2) + j(X_1R_1 + X_2R_2)] \cdot [(R_1+R_2) - j(X_1+X_2)]}{(R_1+R_2)^2 + (X_1+X_2)^2} =$$

$$= \frac{[(R_1+jX_1)(R_2+jX_2)] \cdot [(R_1-jX_1) + (R_2-jX_2)]}{(R_1+R_2)^2 + (X_1+X_2)^2} =$$

$$= \frac{|Z_1|^2 (R_2+jX_2) + |Z_2|^2 (R_1+jX_1)}{|Z_N|^2}$$

$$= \underbrace{\frac{R_1|Z_2|^2 + R_2|Z_1|^2}{|Z_N|^2}}_{R_N} + j\underbrace{\frac{X_1|Z_2|^2 + X_2|Z_1|^2}{|Z_N|^2}}_{X_N} = R_N + jX_N \qquad (13-41)$$

…dobne ako v prípade SRO, budeme aj v prípade obvodu podľa obr. 238 …voriť o rezonancii vtedy, ak paralelná kombinácia impedancií …1 a Z_2 bude predstavovať pre napájací zdroj len činný odpor. …zonančná podmienka je potom daná vzťahom:

$$X_N = \frac{X_1|Z_2|^2 + X_2|Z_1|^2}{|Z|^2} = 0 \qquad (13-42)$$

…teda:

$$(X_1|Z_2|^2 + X_2|Z_1|^2 = 0 \qquad (13-43)$$

… $R_1 \ll |X_1|$ a $R_2 \ll |X_2|$ tak sa podmienka (13-44)
…jednoduší na vzťah

$$X_1 + X_2 = 0 \qquad (13-44)$$

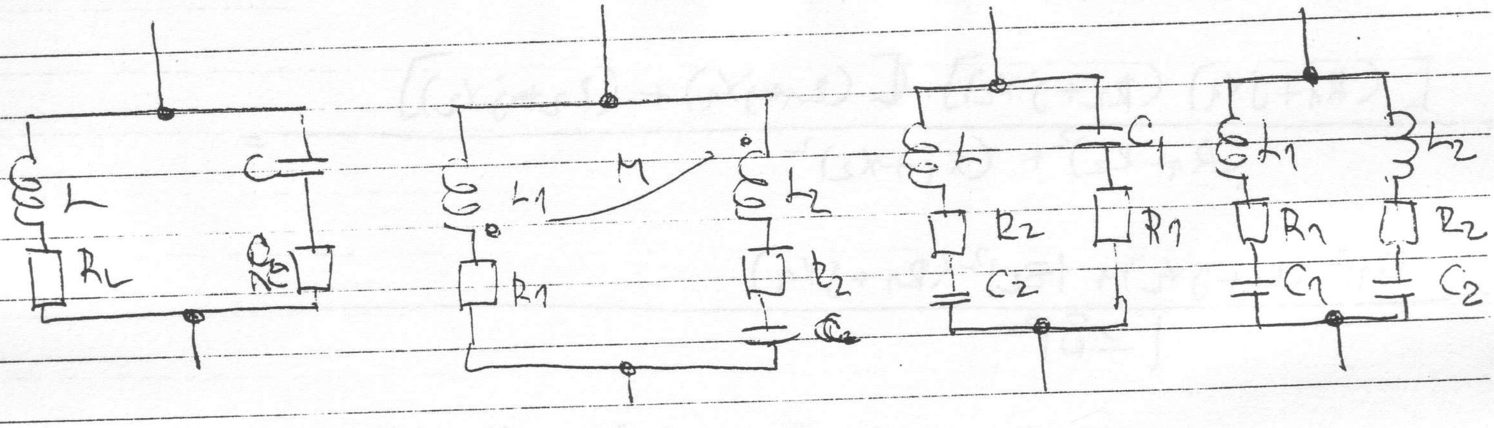
…mu zodpovedá rezonančný odpor:

$$R = \frac{R_1X_2^2 + R_2X_1^2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{(R_1+R_2)X_1^2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{X_1^2}{R_1+R_2} = \frac{X_2^2}{R_1+R_2} \qquad (13-45).$$

tiež

…z vzťahu (13-44) plynie, že rezonančnej podmienky môžno splniť …n vtedy, ak má reaktancia jednej vetvy opačné znamienko, ako reakt-
… obr. 238

a takto obvod nazveme paralelným RO 1. typu. Prehľad PRO ďalších typov je na obr. 238



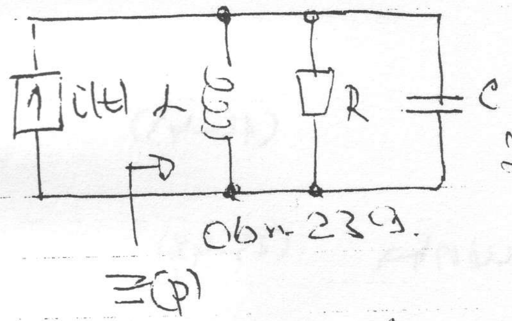
Obr. 238

PRO 1. typu PRO 2. typu PRO 3. typu PRO 4. typu

Poznamenávame, že PRO vyšších typov (napr. 4.) môžu mať i väčší počet rezonančných frekvencií.
V ďalšom sa budeme zaoberať najprv PRO podľa obr. 234, nakoľko sa v oblasti rádioelektroniky stretávame v rôznych formách práve s týmto obvodom.

13.3.1 Jednoduchý paralelný RLC rezonančný obvod

Uvažujme PRO podľa obr. 239. Potom pre jeho impedanciu $Z(p)$ platí:



Obr. 239

$$Z(p)=\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{pL}+pC}=\frac{pLR}{p^2LCR+pL+R}=$$

$$Z(p)=\frac{p\frac{1}{C}}{p^2+p\frac{1}{RC}+\frac{1}{LC}}=\frac{p\frac{1}{C}}{(p-p_1)(p-p_2)} \qquad (13-46)$$

kde $$p_{1,2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}} \qquad (13-47)$$

Póly p_1 a p_2 môžu byť reálne alebo komplexne združené. Uvažujme tieto dva prípady oddelene.

Pre prípad:

$$(1/2RC)^2 \geqq 1/LC = \omega_0^2 \qquad (13-48)$$

resp.

$$R \leqq \omega_0 L/2 = 1/(2\omega_0 C) \qquad (13-49)$$

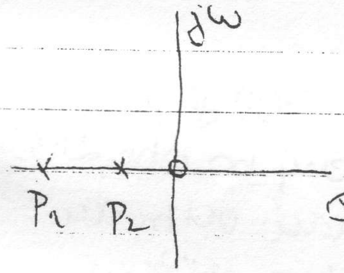
Poznámka: o odvodení (13-49):

$$\frac{1}{2RC} \geqq \omega_0 \Rightarrow \frac{1}{\omega_0} \geqq 2RC \Rightarrow R \leqq \frac{1}{2C\omega_0} = \frac{L}{2LC\omega_0} \; \frac{L\omega_0^2}{2\omega_0}$$

$$R \leqq \frac{1}{2} L\omega_0 = \frac{1}{2C\omega_0} \qquad (13-50)$$

!! 3

V tomto prípade, ležia póly p_1 a p_2 na zápornej časti reálnej osi. Diagram pólov a núl $Z(p)$ je na obr. 240. Z obr. 240 plynie, že



Obr. 240.

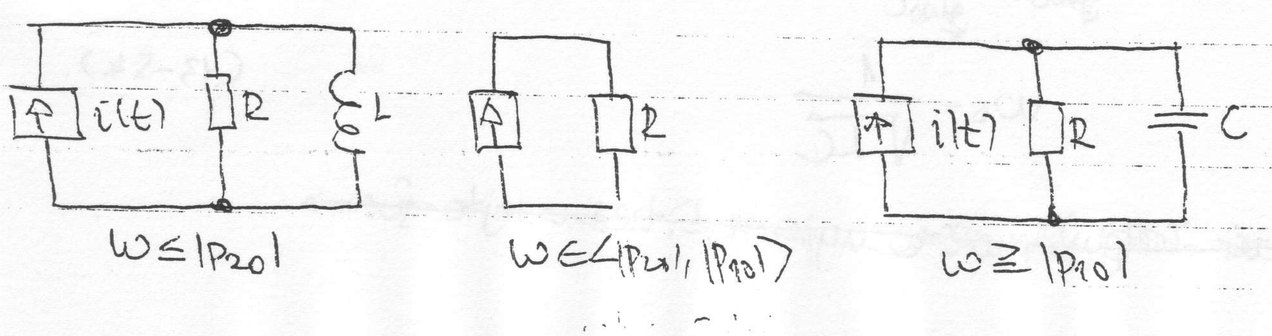
pre malé hodnoty R, (t.j. tie ktoré sú malé v porovnaní s $\omega_0 L/2$), sa bude paralelný RLC obvod správať podobne, ako širokopásmový transformátor, s hraničnými frekvenciami $|p_1|$ a $|p_2|$. Priepustné pásmo môže byť fyzikálne interpretované ako frekvenčné pásmo, pre ktoré je impedancia veľkosť ωL a $\frac{1}{\omega C}$ veľmi veľká v porovnaní s R, a preto v tomto pásme platí:

$$Z(j\omega) = R \qquad (13-51)$$

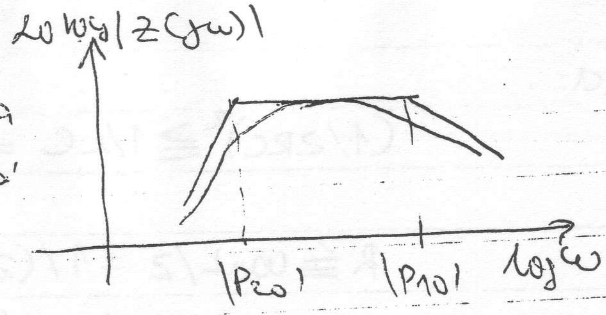
Ak $|p_{10}| \gg |p_{20}|$ potom platí:

$$p_{10} \approx -\frac{1}{RC} \qquad p_{20} \approx -\frac{1/LC}{1/RC} = -\frac{R}{L} \qquad (13-52)$$

Vychádzajúc zo vzťahov (13-51) a (13-52) možno pre širokopásmový RLC obvod pre jednotlivé frekvenčné pásma naznačiť tieto náhradné obvody (obr. 241):



plitúdová frekvenčná charakteristika rokopásmového PRO je naznačená obr. 242.



obr. 242.

dog-ku.

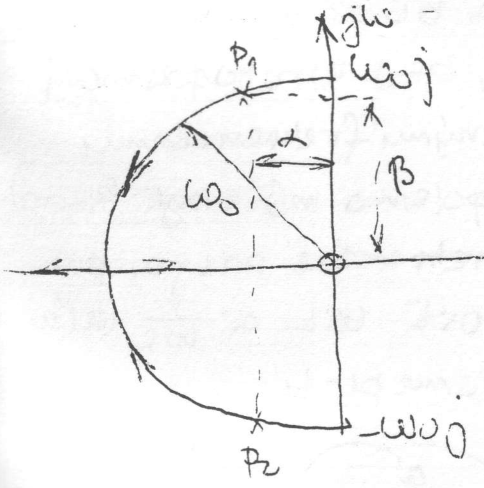
V predpoklade, že platí:

$$(1/2RC)^2 < 1/LC \quad \text{resp.} \quad R > \omega_0 L/2 \qquad (13-53)$$

až na vykreslenie pólov Z(p) možno použiť tento výraz:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\beta \qquad (13-54)$$

kde: $\omega_0 = 1/LC, \alpha = 1/2RC \quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ (13-55)



Obr. 243.

Diagram pólov a núl Z(p) je pre tento prípad naznačený na obr. 243. Je zrejmé, že póly budú od bodu p=0 vždy vzdialené o dĺžku ω_0 nakoľko platí:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \omega_0^2 \qquad (13-56)$$

Z uvedeného plynie, že ak rastie α, t.j. ak klesá R, tak sa póly posúvajú po kružnici smerom k reálnej osi, až pokiaľ sa nestretnú v bode $p=\alpha$.

Pre rezonančnú frekvenciu PRO podľa obr. 239, zo vzťahu (13-44) dostávame:

$$X_1 + X_2 = 0$$

$$j\omega_0 L + \frac{1}{j\omega_0 C} = 0$$

teda:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (13-57).$$

~~Impedanciu Z(jω) možno vyjadriť tiež v tejto forme~~

Pre činiteľ akosti paralelného rezonančného obvodu platí:

$$Q = \frac{\omega_0 A}{P} \qquad (13-58)$$

kde ω_0 je rezonančná frekvencia, P – je činný výkon dodaný do rezistora R a A je energia elektrického poľa kondenzátora, ktorá sa mení na energiu magnetického induktora a naopak. Potom pre činiteľ akosti Q platí:

$$Q = \frac{\omega_0 A}{P} = \frac{\omega_0 \frac{1}{2} C U^2}{\frac{1}{2}\frac{U^2}{R}} = \omega_0 C R = \frac{R}{\omega_0 L} \qquad (13-59).$$

Impedanciu $Z(j\omega)$ PRO možno vyjadriť tiež v tejto forme:

$$Z(j\omega) = \frac{j\omega / C}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\alpha} = \frac{j\omega / C}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\alpha} \frac{/ \cdot \frac{RC}{j\omega}}{/ \cdot \frac{RC}{j\omega}} =$$

$$= \frac{R}{2\alpha \cdot RC + \frac{RC}{j\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{R}{\frac{1}{2RC} 2RR + j\, RC \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}} =$$

$$= \frac{R}{1 + j\, \omega_0 RC \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0}} = \frac{R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

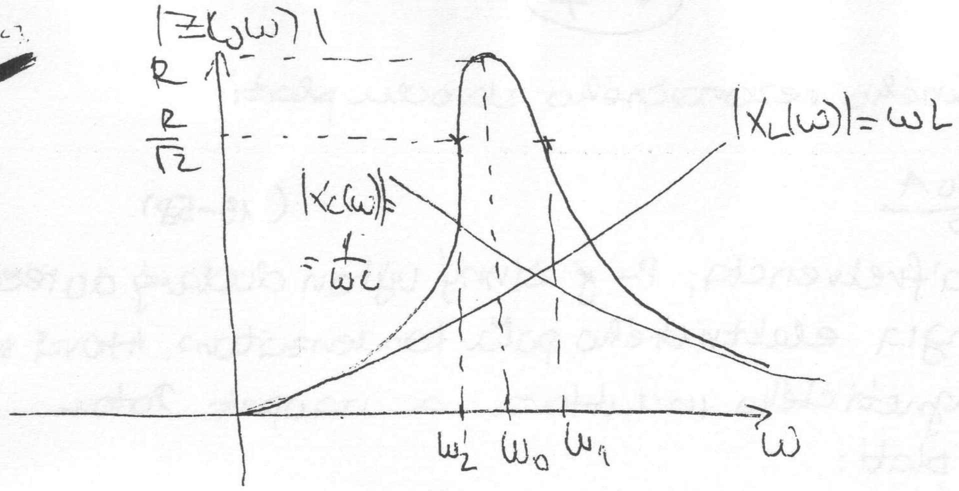
t.j.

$$Z(j\omega) = \frac{R}{1 + jQ\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0}} = |Z| e^{j\varphi} \qquad (13-60)$$

kde

$$|Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \qquad \varphi = -\mathrm{arctg}\, \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\,\omega_0} Q \qquad (13-61)$$

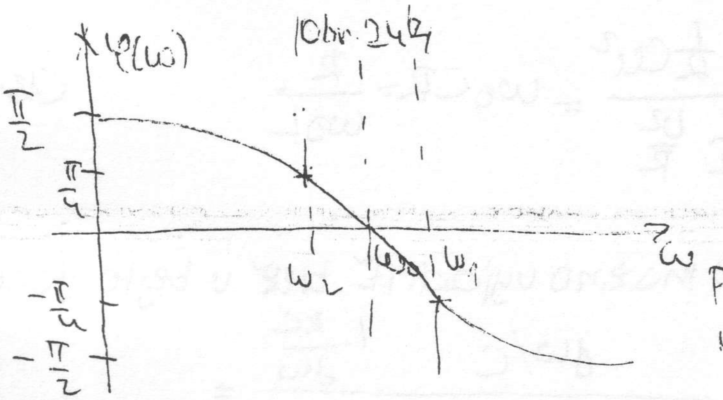
Závislosť impedancie $|Z(j\omega)|$ od frekvencie je naznačená na obr. 144. Z obr. 144 vidíme, že PRO sa správa ako pásmový priepust. Pre hraničné frekvencie tohoto pásmového priepustu



potom platí: $|Z(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{2}}$ (13-62)

Použitím rovníc (13-60) a (13-61) zisťujeme, že potom pre hraničné frekvencie PRO musí platiť vzťah

$$Q\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega_0\omega} = \pm 1 \quad (13\text{-}63)$$



Obr. 24.4

Riešením rovnice (13-63) potom obdržíme hraničné frekvencie PRO v tejto forme:

$$\omega^2-\omega_0^2 = \pm\frac{1}{Q}\omega_0\omega \qquad \omega_{1,2,3,4} = \pm\frac{1}{2Q}\omega_0 \pm\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2+\omega_0^2}$$

$$\omega^2-\omega_0^2 = \pm\frac{1}{Q}\omega_0\omega \qquad \omega_1 = \frac{1}{2Q}\omega_0 + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2+\omega_0^2}$$

$$\omega^2 \mp \frac{1}{Q}\omega\omega_0 - \omega_0^2 = 0 \qquad \omega_2 = -\frac{1}{2Q}\omega_0 + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2+\omega_0^2} \quad (13\text{-}64)$$

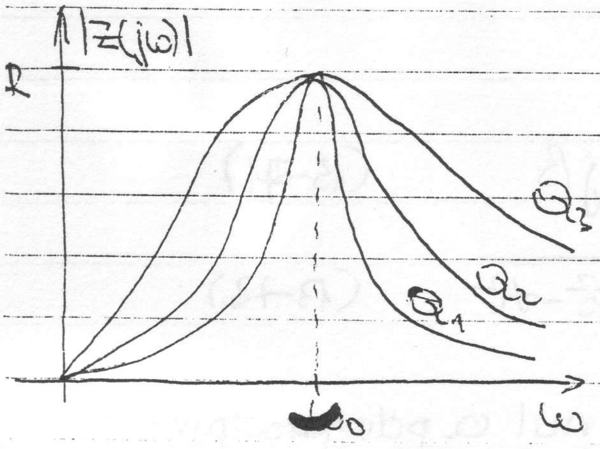
Použitím (13-64) zisťujeme, že pre šírku priepustného pásma PRO platí vzťah

$$B = \omega_1-\omega_2 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (13\text{-}65)$$

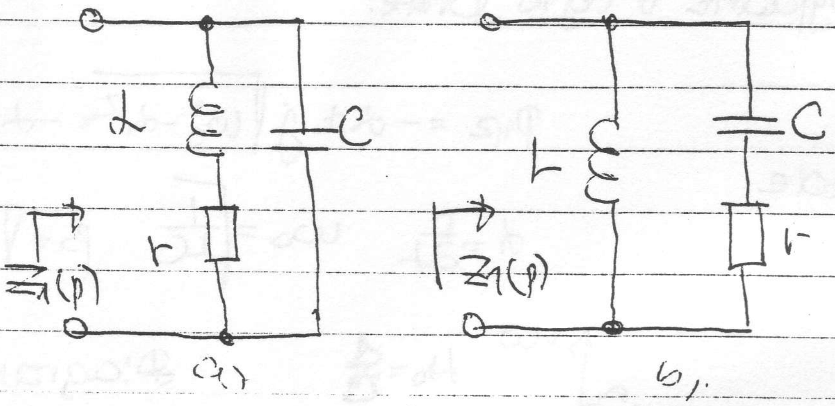
Ak sa vrátime ku vzťahu (13-61), tak vidíme, že vstupná impedancia $|Z(j\omega)|$ je maximálna pre $\omega=\omega_0$, pričom platí:

$$Z(j\omega_0) = |Z(j\omega_0)| = \underline{\underline{R}} \quad (13\text{-}66)$$

Podobne ako v prípade SRO, platí, že vyšší činiteľ akosti Q, má za následok obvod s užšou šírkou priepustného pásma. (obr. 24.5).



$Q_1 > Q_2 > Q_3$ Obr. 245.



Obr. 246.

V tomto odseku sa budeme zaoberať PRO, ktorého cievka je modelovaná sériovým zapojením ideálneho induktora s induktívnosťou L a ideálneho rezistora s odporom r. (obr. 246a). Odvodené riešenie zovšeobecníme tiež na prípad, keď je rezistor zapojený do série s kapacitorom (obr. 246b).
Pre impedanciu $Z_1(p)$ obvodu podľa obr. 246a) platí:

$$Z_1(p) = \frac{1}{pC + \frac{1}{r + pL}} = \frac{r + pL}{prC + p^2LC + 1} = \frac{(r+pL)\frac{1}{LC}}{p^2 + p\frac{r}{L} + \frac{1}{LC}} =$$

$$Z_1(p) = \frac{\left(p + \frac{r}{L}\right)\left(\frac{1}{C}\right)}{p^2 + p\frac{r}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{\left(p + \frac{r}{L}\right)\left(\frac{1}{C}\right)}{(p - p_{10})(p - p_{20})} \qquad (13-67)$$

kde

$$p_{10,20} = \left(-\frac{r}{2L}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (13-68)$$

Zo vzťahu (13-67) vidíme, že póly $Z_1(p)$ môžu byť v závislosti od parametrov obvodu reálne alebo komplexné. Nakoľko analýza obvodu pre prípad reálnych pólov je podobná na analýzu, ktorú sme previedli pre PRO v predošlom odseku, obmedzíme našu pozornosť pre prípad

$$\frac{1}{LC} > \left(\frac{r}{2L}\right)^2 \qquad (13-69)$$

alebo ekvivalentne

$$r < 2\omega_0 L = 2/\omega_0 C \qquad (13-70)$$

kde $\omega_0 = 1/\sqrt{\ldots}$ Pre tento prípad ... póly $Z_1(p)$ ...

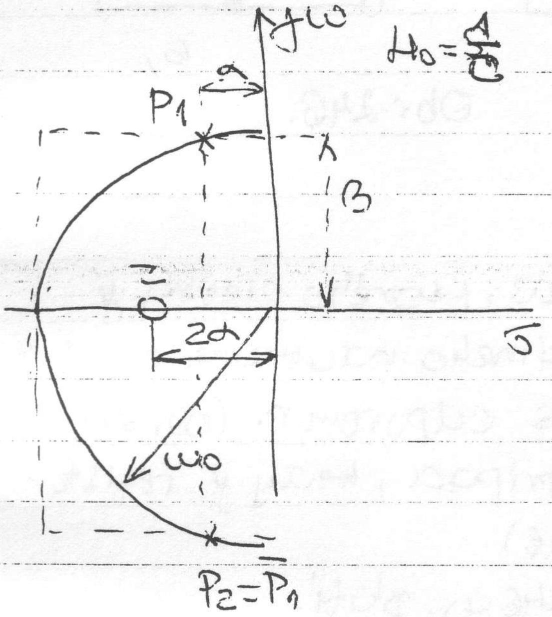
(14). (230)

Vyjadriť v tejto forme:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\beta \qquad (13\text{-}71)$$

kde

$$\alpha = \frac{r}{2L} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \qquad (13\text{-}72)$$



obr. 247.

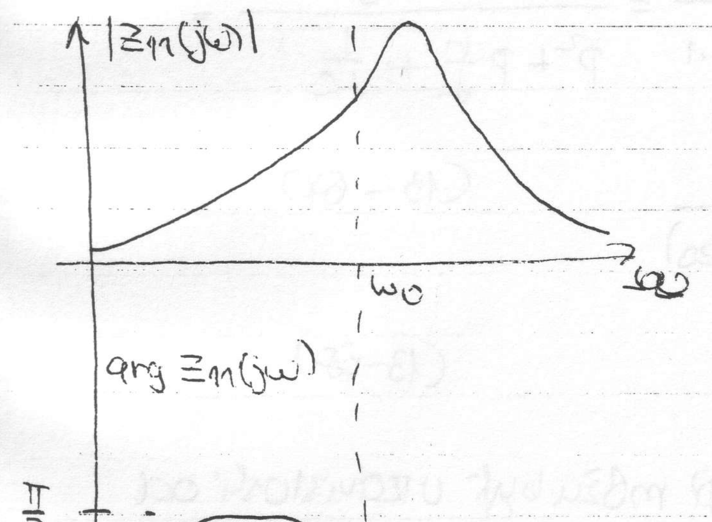
Diagram núl a pólov odpovedajúci ~~obv.~~ impedancii $Z_{11}(p)$, je naznačený na obr. 247. Z obr. 247. vyjdiet, že pre rastúce α (ktoré rastie z rastom odporu r), sa póly i nulový bod posúvajú smerom doľava, v komplexnej rovine (p), pričom póly p_1 a p_2 sa posúvajú-pohybujú po kružnici s polomerom ω_0, kde ω_0 je frekvencia, pri ktorej sú impedancie induktora a kapacitora rovnaké.

Grafické závislosti modulu impedancie $|Z_{11}(j\omega)|$ a $\arg|Z_{11}(j\omega)|$ sú naznačené na obr. 248. Z týchto obr. vidíme, že na rozdiel od PRO s sústredeného obvodu. ~~ohni~~ $|Z_{11}(j\omega)|$ nemá maximum v ω_0, a ani $\arg(Z_{11}(j\omega))$ ~~nemá~~ nemá nulový v $\omega = \omega_0$. Z tohto dôvodu, pre obvod podľa obr. 246 existujú dve rôzne frekvencie, pre ktoré:

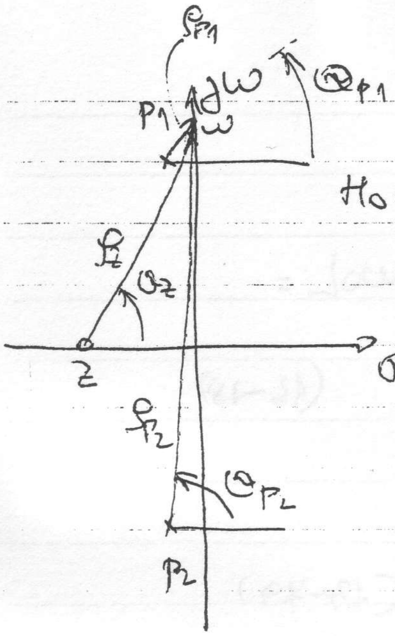
a) je amplitúda $|Z_{11}(j\omega)|$ maximálna

b) je fáza - $\arg Z_{11}(j\omega)$ nulová.

Nastáva, ak sú póly p_1 a p_2 blízko ~~rozoma~~ imaginárnej osi, obe tieto frekvencie konvergujú ku frekvencii ω_0



obr. 248.



$H_0 = \frac{1}{C}$

obr. 247.

Okrem uvedeného poznamenávame, že v tomto prípade neexistuje jednoduché vyjadrenie pre šírku priepustného pásma obvodu podľa obr. 247.

1. Avšak za predpokladu, že $\alpha \ll \omega_0$, alebo ak Q_L definované vzťahom

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{\omega_0 C r} = \frac{\omega_0}{2\alpha} \qquad (13\text{-}43)$$

je vysoké, možno nájsť určité zjednodušené vyjadrenie pre $Z_{11}(j\omega)$. Vychádzajúc z obr. 249, pri použití vzťahu (13-68), možno pre $Z_{11}(j\omega)$ písať:

$$Z_{11}(j\omega) = H_0 \frac{\rho_z}{\rho_{p1}\rho_{p2}} \exp j\left(\Theta_z - \Theta_{p1} - \Theta_{p2}\right) \qquad (13\text{-}74)$$

om pozorujeme, že pre frekvencie v okolí p_1 ($\omega > 0$) platia tiež to vzťahy:

$$\rho_z = \omega_0 \quad \Theta_z = \frac{\pi}{2} \qquad \rho_{p2} \approx 2\omega_0 \quad \Theta_{p2} = \pi/2 \qquad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \approx \omega_0 \qquad (13\text{-}75)$$

žitím (13-75) možno (13-74) zapísať v tejto forme:

$$Z_{11}(j\omega) \approx \frac{1}{C}\frac{\omega_0}{\rho_{p1}\cdot 2\omega_0} \exp j\left[\frac{\pi}{2} - \Theta_{p1} - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2C}\frac{1}{\rho_{p1}} e^{-j\Theta_{p1}} =$$

$$= \frac{1}{2C}\frac{1}{\rho_{p1} e^{j\Theta_{p1}}} = \frac{1}{2C}\frac{1}{j\omega + (\alpha - j\omega_0)} =$$

$$= \frac{1}{2C\alpha}\frac{1}{1 + j\frac{\omega-\omega_0}{\alpha}} \qquad \omega > 0 \qquad (13\text{-}76)$$

podobné vzťahu

$$Z_{11}(j\omega) = \frac{R}{1 + j\frac{\omega-\omega_0}{\alpha}} = \frac{1}{2C\alpha}\frac{1}{1 + j\frac{\omega-\omega_0}{\alpha}} \qquad (13\text{-}77)$$

ový zodpovedá impedancii PPO s vysokým Q_L.

Naopak vzťah $\frac{1}{2\alpha C}$ môžeme vyjadriť ~~tototo~~:

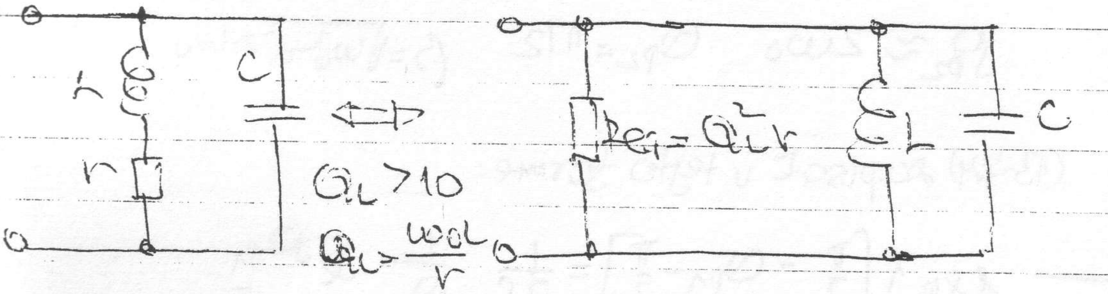
$$\frac{1}{2\alpha C} = \frac{\omega_0}{2\omega\alpha}\frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\omega_0}{\frac{r}{2L}\cdot 2}\frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\omega_0 L}{r\omega_0 C} = Q_L \omega_0 L =$$

$$= Q_L \frac{\omega_0 L}{r}\cdot r = Q_L^2 r = R_{eq} \qquad (13\text{-}78)$$

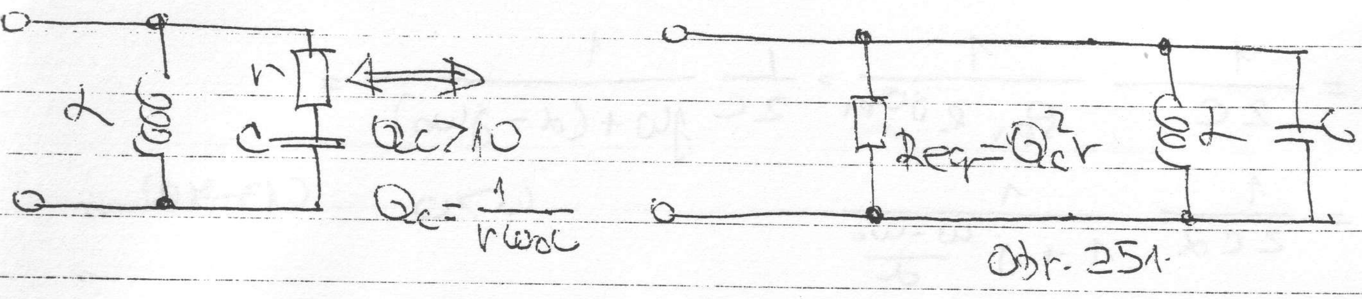
tak (13-76) môžeme prepísať do tvaru:

$$Z_{11}(j\omega) = \frac{R_{eq}}{1 + j\frac{\omega-\omega_0}{\alpha}} \qquad (13\text{-}79)$$

čo zodpovedá vyjadreniu pre impedanciu paralelného RLC obvodu s vysokým činiteľom akosti. Vychádzajúc z toho, pre vysoké hodnoty Q_L (napr. $Q_L > 10$, kedy (13-79) platí s presnosťou niekoľkých percent), môže byť obvod podľa obr. 249a, modelovaný obvodom podľa obr. 250. Podobné závery môžeme ukázať, ak urobíme analýzu podrobne obvodu podľa obr. 246b. Potom tento obvod môžeme modelovať s vysokou presnosťou obvodom podľa obr. 251.



Obr. 250.



Obr. 251.