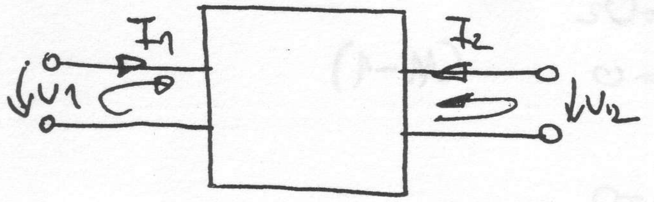
11. Lineárne a linearizované dvojbrány (štvorpóly).



obr. 170

Dvojbránou nazývame každú takú uzavretú a ľubovoľne zloženú sústavu elektrických obvodov, ktorá sa k vonkajším zdrojom alebo ďalším obvodom pripája dvomi pármi svoriek (brán). Schematicky budeme dvojbrány znázorňovať podľa obr. 170. Tu predpokladáme, že chúdnuma svorka [illegible] brány prechádza rovnaký prúd. Je to základná podmienka teórie dvojbrán a má veľký význam pri spájaní dvojbrán. Vnútorná štruktúra dvojbrán môže byť ľubovoľná. Podľa povahy vnútorných členov, delíme dvojbrány na:

1. Dvojbrány pasívne, zložené z rezistorov, kapacitorov, induktorov a transformátorov.
1. Dvojbrány neautonómne, ktoré okrem pasívnych členov môžu obsahovať aj všetky riadené zdroje (t.j. tranzistory, operačné zosilňovače).
1. Dvojbrány autonómne, ktoré okrem pasívnych členov a riadených zdrojov obsahujú tiež nezávislé zdroje elektrickej energie.

[illegible] historickom vývoji teórie dvojbrán bolo definovaných veľmi mnoho charakteristík, ktoré istým spôsobom popisujú chovanie sa dvojbrán, pričom je tiež nutné definovať vlastnosti vonkajších obvodov, ktoré sú k dvojbráne pripojené. Upodstate možno tieto charakteristiky dvojbrán rozdeliť do dvoch skupín na:

1. Maticové charakteristiky dvojbrán
2. Prenosové charakteristiky dvojbrán

Namenávame, že medzi týmito charakteristikami existujú úzke vzájomné vzťahy.

[illegible]

[illegible]zujme neautonómnu dvojbránu podľa obr. 170, ktorý okrem 2 vonkajších obvodov [illegible] ešte (n-2) vnútorných nezávislých obvodov. Vzhľadom na to, že uvažovaná brána je neautonómna, t.j. táto dvojbrána nemá nezávislé zdroje elektrickej energie, je možné ju opísať metódou slučkových prúdov pomocou tejto [illegible]tavy lineárnych algebraických rovníc

$$
\begin{aligned}
a_{11} I_1 + a_{12} I_2 + a_{13} I_3 + \dots + a_{1n} I_n &= U_1 \\
a_{21} I_1 + a_{22} I_2 + a_{23} I_3 + \dots + a_{2n} I_n &= U_2 \\
a_{31} I_1 + a_{32} I_2 + a_{33} I_3 + \dots + a_{3n} I_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{n1} I_1 + a_{n2} I_2 + a_{n3} I_3 + \dots + a_{nn} I_n &= 0
\end{aligned}
\qquad (11-1)
$$

Vychádzajúc z rovníc (11-1), možno pri použití metódy algebraických doplnkov, napísať pre U_1, U_2, I_1 a I_2 tieto vzťahy:

$$
\left.
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{A_{11}}{A} U_1 + \frac{A_{21}}{A} U_2 \\
I_2 &= \frac{A_{12}}{A} U_1 + \frac{\Delta_{22}}{A} U_2
\end{aligned}
\right\} (11-2)
$$

kde $A_{11} = \Delta_{1:1}$ $\quad A_{12} = \Delta_{1:2}$ $\quad \Delta_{2:1} = A_{21}$ $\quad A_{22} = \Delta_{2:2}$ $\quad A = A$

(11-3)

pričom koeficienty pri U_1 a U_2 majú rozmery admitancie. Preto rovnice (11-2) nazývame admitančnými rovnicami. Formálne ich možno zapísať v tvare

$$I = YU \qquad (11-4)$$

kde

$$
I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}/A & A_{21}/A \\ A_{12}/A & A_{22}/A \end{bmatrix} \qquad (11-5)
$$

pričom maticu Y nazývame admitančnou maticou dvojbrany. Rovnicu (11.4) možno pomocou $Z = Y^{-1}$ prepísať do tejto formy:

$$
\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = Y^{-1} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \qquad (11-6)
$$

kde Z je tzv. impedančná matica dvojbrany, pričom rovnice (11-6) sú známe ako impedančné rovnice dvojbrany.

V teórii obvodov, sú okrem týchto charakteristík dvojbrán, používané i nasledujúce maticové formy opisu dvojbrán:

Impedančne rovnice:

$$\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix} = Z\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}$$

Admitančné rovnice:

$$\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix} = Y\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix}$$

Kaskádne rovnice

$$\begin{bmatrix}U_1\\I_1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}U_2\\-I_2\end{bmatrix}$$

Spätné kaskádne r.

$$\begin{bmatrix}U_2\\I_2\end{bmatrix} = B\begin{bmatrix}U_1\\-I_1\end{bmatrix}$$

Sério-paralelné r.

$$\begin{bmatrix}U_1\\I_2\end{bmatrix} = H'\begin{bmatrix}U_2\\I_1\end{bmatrix}$$

Paralelno-sériové r.

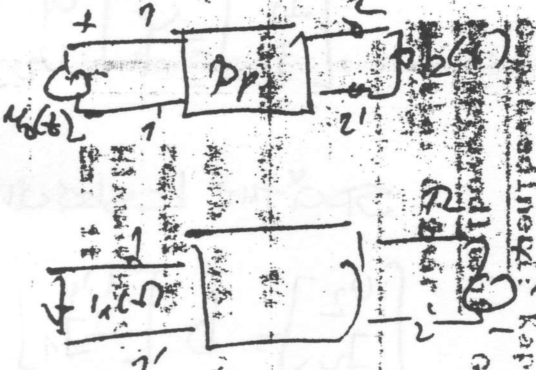
$$\begin{bmatrix}U_2\\I_1\end{bmatrix} = K\begin{bmatrix}U_1\\I_2\end{bmatrix}$$

Hybridné rovnice

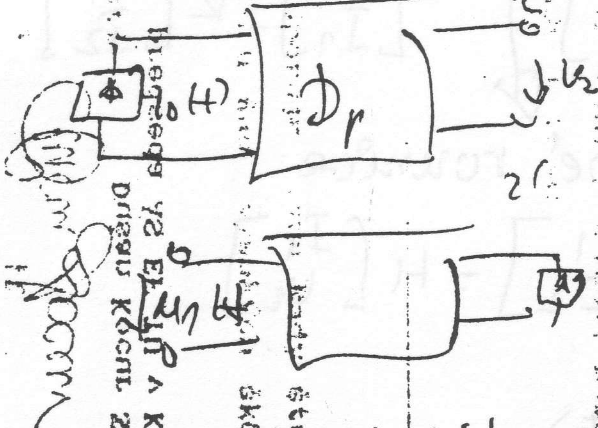
$$\begin{bmatrix}U_1\\I_2\end{bmatrix} = H\begin{bmatrix}I_1\\U_2\end{bmatrix}$$

156

Poznámky k princípu reciprocity



$$u_1(t) = i_2(t)$$



$$u_1(t) = u_2(t)$$

150

a). Kaskádne rovnice: $\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$; (11-7)

A - kaskádna matica dvojbrány.

b). Spätné kaskádne rovnice $\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$ (11-8)

B - spätná kaskádna matica dvojbrány

c). sério-paralelné rovnice (hybridné) $\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ (11-9)

d). Paralelno-sériové rovnice $\begin{bmatrix} U_2 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ (11-10)

paralelno-sériová matica dvojbrány.
hybridné

$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} I_1 \\ U \end{bmatrix}$

Každá z uvedených rovníc dvojbrány vyjadruje vlastnosti dvojbrány jednoznačne. Avšak ani jedna z nich nie je tak univerzálna, aby mohla vo všetkých praktických prípadoch použitia nahradiť ostatné. Pri výpočtoch siahneme vždy po tej charakteristike, ktorá je pre danú úlohu najvhodnejšia. Pre rýchly výpočet matice požadovaného typu z matice iného typu, možno použiť prevodové vzťahy, ktoré sú obyčajne uvádzané v tabuľkách v odbornej literatúre.

Ak sústava rovníc (11-1) prislúcha dvojbráne, ktorá je zostavená iba z pasívnych prvkov, jej determinant - matica je vzhľadom k hlavnej diagonále symetrická. Toto tvrdenie vyplýva z teorémy reciprocity, ktorá platí pre každú lineárnu sústavu, ktorá neobsahuje tzv. závislé zdroje.

Teorém reciprocity možno formulovať takto: ideálny zdroj univerzálneho nezávislého napätia U_{m}, pôsobiaci v m-tom obvode pasívnej lineárnej sústavy, spôsobí v q-tom obvode rovnaký prúd, ako spôsobí v m-tom obvode ten istý zdroj prenesený do q-teho obvodu.

Vychádzajúc z tejto vlastnosti impedančnej a admitančnej matice sústavy, platí:

Dôkaz.

$A_{21} = A_{12}$ (11-11)

teda pre parametre impedančnej a admitančnej matice dvojbrány platí:

$y_{12} = y_{21}$ $\quad z_{21} = z_{12}$ (11-12)

$z_{12}=z_{21}$ $y_{12}=y_{21}$

Ďalej, vychádzajúc z prevodových vzťahov medzi prvkami matíc Z, Y, A, B, H, ak zisťujeme, že podmienka reciprocity sa do vlastností prvkov týchto matíc premietne takto:

$\cancel{h_{12}=-h_{21}}$ $\cancel{a_{12}=-a_{21}}$ $\det A = 1$ $\cancel{\det B = A}$ (11-13)

Na základe vyššie uvedených vzťahov (11-12) a (11-13) môžeme konštatovať že matice lineárnych dvojbrán sú vždy určené 3 prvkami!

V praxi sa veľmi často používajú pozdĺžne súmerné dvojbrány. Súmernou dvojbranou nazývame dvojbránu, u ktorej možno navzájom zameniť vstupnú a výstupnú bránu (vstupné a výstupné svorky), bez toho aby sa ovplyvnili podmienky prenosu elektrickej energie.

Uvažujme kaskádne rovnice pasívnej dvojbrány (priame a spätné). Potom platí:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \qquad (11\text{-}14)$$

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \qquad (11\text{-}15)$$

aby dvojbrána bola pozdĺžne symetrická, tak musí potom platiť:

$$A = B \qquad (11\text{-}16)$$

Vypočítajme teraz maticu B, ak poznáme maticu A:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{\det A} & +\frac{a_{12}}{\det A} \\ +\frac{a_{21}}{\det A} & \frac{a_{22}}{\det A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & + a_{12} \\ +a_{21} & +a_{11} \end{bmatrix} \qquad (11\text{-}17)$$

Nakoľko platí (11-13) tj. $\det A = 1$, pri uvážení (11-16) dostávame

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \qquad (11\text{-}18)$$

Z rovnice (11–18) vidíme, že v prípade pozdĺžne symetrických pasívnych dvojbrán, prvky kaskádnej matice dvojbrány spĺňujú podmienky:

$$a_{11} = a_{22} \qquad (11\text{–}19).$$

Ďalej, vychádzajúc z prevodových vzťahov medzi prvkami matíc Z, Y, A, B, K a H, zistíjeme, že podmienka pozdĺžnej súmernosti sa do vlastností prvkov týchto matíc premietne takto:

$$y_{11} = y_{22} \qquad z_{11} = z_{22} \qquad a_{11} = a_{22} \qquad b_{11} = b_{22} \qquad (11\text{–}20)$$
$$(y_{21} = y_{12}) \qquad (z_{12} = z_{21}) \qquad \det A = 1 \qquad \det B = 1$$
$$\det H = 1 \qquad \det K = 1$$

Z uvedeného vidieť, že pasívna a súmerná lineárna dvojbrána má maticové charakteristiky dvoma prvkami jednoznačne určené.

Poznámka:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} =$$

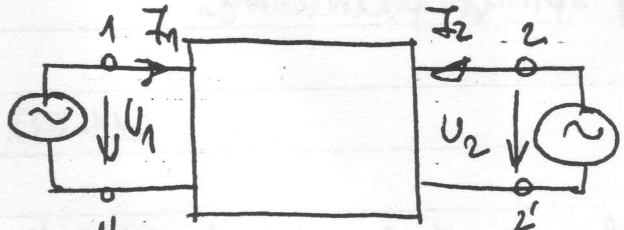
$$= \begin{bmatrix} a_{22}/\det A & -a_{12}/\det A \\ -a_{21}/\det A & a_{11}/\det A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22}/\det A & -a_{12}/\det A \\ a_{21}/\det A & -a_{11}/\det A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \qquad \det A = 1$$

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

$$a_{22} = a_{11} \qquad a_{11} = a_{22}$$

11.2. Ďalšie vlastnosti matíc pasívnych dvojpólov.



Obr. 1.11

Základom našich ďalších úvah bude fyzikálne odôvodnená požiadavka, aby celkový výkon, ktorý spotrebuje pasív dvojbrána pri napájaní z dvoch zdrojov s ľubovoľnými amplitúdami napätí U_1 a U_2 v zapojení podľa obr. 1.11, nebol záporný. Formujme ju na základe impedančných ~~matíc~~ rovníc nasled

$$P_S = \mathrm{Re}\left[U_1\bar{I}_1 + U_2\bar{I}_2\right] \geqq 0 \qquad (11\text{-}21)$$

a po dosadení

$$P_S = \mathrm{Re}\left[U_1\bar{I}_1 + U_2\bar{I}_2\right] = \mathrm{Re}\left[(z_{11}I_1 + z_{12}I_2)\bar{I}_1 + (z_{21}I_1 + z_{22}I_2)\bar{I}_2\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[z_{11}I_1\bar{I}_1\right] + \mathrm{Re}\left[z_{12}I_2\bar{I}_1\right] + \mathrm{Re}\left(z_{21}I_1\bar{I}_2\right) + \mathrm{Re}\left(z_{22}I_2\bar{I}_2\right) \qquad (11\text{-}22)$$

Ďalej, nech $\quad I_1 = I_{r1} + jI_{i1} \qquad I_2 = I_{r2} + jI_{i2} \qquad (11\text{-}23)$.

Dosadením (11-23) do (11-22) dostávame:

$$P_S = \mathrm{Re}\left(z_{11}I_{r1}^2 + z_{11}I_{i1}^2\right) + 2\mathrm{Re}\left[z_{12}(I_{r1}I_{r2} + I_{i1}I_{i2})\right] + \mathrm{Re}\left[z_{22}(I_{r2}^2 + I_{i2}^2)\right] \qquad (11\text{-}24)$$

Pričom sme použili vzťahy:

$$I_1\bar{I}_1 = (I_{r1} + jI_{i1})(I_{r1} - jI_{i1}) = I_{r1}^2 + jI_{i1} - jI_{i1} + I_{i1}^2 = I_{r1}^2 + I_{i1}^2$$

$$I_2\bar{I}_2 = (I_{r2} + jI_{i2})(I_{r2} - jI_{i2}) = I_{r2}^2 + jI_{i2} - jI_{i2} + I_{i2}^2 = I_{i2}^2 + I_{r2}^2$$

$$z_{12}(I_2\bar{I}_1) + z_{21}(I_1\bar{I}_2) = z_{12}\left[I_2\bar{I}_1 + I_1\bar{I}_2\right] =$$

$$= z_{12}\left(I_2\bar{I}_1 + \overline{\bar{I}_1 I_2}\right) = 2z_{12}\mathrm{Re}\left(I_2\bar{I}_1\right) = 2z_{12}\mathrm{Re}\left[(I_{r2} + jI_{i2})\cdot\right.$$

$$\left.(I_{r1} - jI_{i1})\right] = 2z_{12}\mathrm{Re}\left(I_{r1}I_{r2} + jI_{i2}I_{r1} - jI_{r2}I_{i1} + I_{i1}I_{i2}\right) =$$

$$= 2z_{12}\left(I_{r1}I_{r2} + I_{i1}I_{i2}\right)$$

...čtal (11-24) možno ďalej upraviť takto:

$$... = [Re(z_{11}) I_{r1}^2 + 2Re(z_{12}) I_{r1} I_{r2} + Re\, I_{r2}^2] + [Re(z_{11}) I_{i1}^2 + 2Re(z_{12}) I_{i1} I_{i2} + Re(z_{22}) I_{i2}^2] \geqq 0 \quad (11\text{-}25)$$

...dva členy v hranatých zátvorkách sú formálne rovnaké kvadratické formy ...rednými premennými I_{rk} resp. I_{ik} so spoločnou maticou kvadratickej ...rmy

$$Re(Z) = \begin{bmatrix} Re(z_{11}) & Re(z_{12}) \\ Re(z_{12}) & Re(z_{22}) \end{bmatrix} \quad (11\text{-}26)$$

...zhľadom na platnosť (11-25) je táto kvadratická forma pozitívne semi-...definitná, z čoho plynie, že i matica $Re(Z)$ je pozitívne semidefinitná. ...matematiky je známe, že $Re(Z)$ bude pozitívne semidefinitná, ak ...aden z jej hlavných subdeterminantov nebude záporný. Vzhľadom ...to, musia prvky matice $Re(Z)$ vyhovovať týmto ~~podmi~~ podmienkam.

$$\begin{aligned} Re(z_{11}) &\geqq 0 \\ Re(z_{22}) &\geqq 0 \\ Re(z_{11}) Re(z_{22}) - R(z_{12})^2 &\geqq 0 \end{aligned} \quad (11\text{-}27)$$

...žitím analogického postupu na základe admitančných ~~matic~~ rovníc dospejeme k pod-...ienkam tvaru:

$$\begin{aligned} Re(y_{11}) &\geqq 0 \\ Re(y_{22}) &\geqq 0 \\ Re(y_{11}) Re(y_{22}) - Re(y_{12})^2 &\geqq 0 \end{aligned} \quad (11\text{-}28)$$

...ahy (11-27) a (11-28) predstavujú veľmi dôležité vyjadrenie vlastností ...rakteristík pasívnych lineárnych dvojbrán:

. Prvky hlavnej diagonály matíc Z a Y musia byť dané vo forme realizovateľných funkcií, t.j. tak ako sme ich poznali v kapitole o jednobránach. To vlastne znamená, že musia predstavovať vstupné impedancie (~~výstupné~~) alebo admitancie realizovateľných lineárnych jednobrán.

b). Prvky mimo hlavnej diagonály nemusia byť realizovateľnými funkciami, čiže funkcie z_{12} resp. y_{12} nemusia mať vlastnosti pasívnych jednoš.

Podmienka (11-29) je známa, tiež ako podmienka reálnej časti.

Vráťme sa teraz k energetickým funkciám, ktoré sme opísali v kapitole 10. Podľa rovnice (10.9) platí:

$$\bar{I}^T U = F_0 + pT_0 + \frac{1}{p} V_0 \qquad (11\text{-}29)$$

kde v prípade dvojbrán platí:

$$U = ZI \qquad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad (11\text{-}30)$$

Dosadením (11-30) do (11-29)

$$\bar{I}^T Z I = F_0 + pT_0 + \frac{1}{p} V_0 = F(p) \qquad (11\text{-}31)$$

Pretože F_0, T_0, a V_0 nenadobúdajú záporné hodnoty, je funkcia $F(p)$ PRF. Prvky impedančnej matice Z prúdmi I_1 a I_2 tvoria kladnú kvadratickú formu:

$$\bar{I} Z I = [\bar{I}_1 \ \bar{I}_2] \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} =$$

$$= z_{11} I_1 \bar{I}_1 + 2 z_{12} \operatorname{Re}[I_1 \bar{I}_2] + z_{22} I_2 \bar{I}_2 =$$

$$= F_0 + pT_0 + \frac{1}{p} V_0 = F(p) \qquad (11\text{-}34)$$

Z rovnice (11-34) je zrejmé, že pól ktoréhokoľvek parametra z_{ik} je tiež pólom funkcie $F(p)$. Pretože $F(p)$ je PRF, musia všetky póly z_{ik} ležať v ľavej polrovine p, ale to funkcie regulárne v pravej polrovine s kladnými rezíduami v jednoduchých póloch na imaginárnej osi.

funkcie, ktoré opisujú chovanie sa pasívnych recipročných dvojbránov, majú tieto vlastnosti

a). Žiadny pól funkcie z_{12}, y_{12} a $T_{12}(p)$ nemôže ležať v pravej polrovine
b). Žiadny pól $T_{12}(p)$ nemôže ležať v počiatku alebo v nekonečne.
c). póly fcie z_{11} a y_{12}, ktoré ležia na imaginárnej osi sú jednoduché s reálnymi rezíduami
d). póly funkcie $T_{12}(p)$, ktoré ležia na imaginárnej osi, sú jednoduché s imaginárnymi rezíduami
e) admitančné a impedančné parametre spĺňajú rezíduovú podmienku

$$k_{11}k_{22}-k_{12}^2 \geq 0$$

vo všetkých póloch ležiacich na imaginárnej osi.
f). Nulové body funkcií z_{12}, y_{12} a $T_{12}(p)$ môžu byť viacnásobné a môžu ležať hocikde v rovine p
g. Impedančné a admitančné parametre spĺňajú podmienku reálnych častí

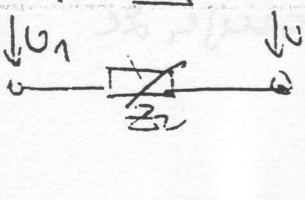
$$r_{11}r_{22}-r_{12}^2 \geq 0$$
$$g_{11}g_{22}-g_{12}^2 \geq 0$$

Dôkazy platnosti niektorých z týchto vlastností, v ďalšom uvádzať nebudeme. Záujemcovia ich môžu nájsť napr. v práci Balabian, N.: Syntéza elektrických obvodov, SNTL Praha, 1965.

1.1.3. Degenerované dvojbrány

Na základe uvedených úvah by sme mohli predpokladať, že každá lineárna dvojbrána má definované všetky druhy charakteristík. Dvojbrány, ktoré pozostávajú aspoň z 2 nezávislých obvodov, alebo ktoré nemajú galvanickú väzbu medzi vstupom a výstupom, tvoria výnimky z tohoto pravidla. Takéto dvojbrány nazývame degenerovanými dvojbranami. Charakteristiky takýchto dvojbranov ... ich ... matice

Príklad:



$$I_1=\frac{U_1}{Z_1+Z_2}-\frac{U_2}{Z_1+Z_2}$$

$$I_2=-I_A=-\frac{U_1}{Z_1+Z_2}+\frac{U_2}{Z_1+Z_2}$$

... matic.
Charakter.:

zídua parametrov z_{ik} označme ako k_{ik} a reziduum $F(p)$ označme
o k. Ak zavedieme nové reálne premenné x_1 a x_2, potom platí:

$$k = k_{11}x_1^2 + 2k_{12}x_1x_2 + k_{22}x_2^2 \geqq 0 \qquad (11\text{-}35)$$

kže rezídua parametrov impedančnej matice tvoria opäť kladnú kvadratickú
rmu a matica rezíduí je <u>pozitívne semidefinitná</u>. Prvky matice rezíduí

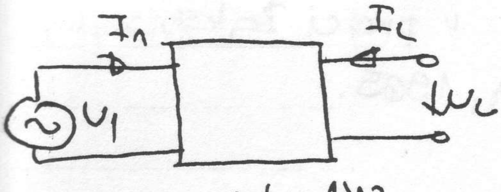
$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \qquad (11\text{-}36)$$

sia teda vyhovovať podmienkam

$$\left.\begin{aligned} k_{11} &\geqq 0 \\ k_{22} &\geqq 0 \\ k_{11}k_{22} - k_{12}^2 &\geqq 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(11\text{-}37)\\(11\text{-}38)\end{matrix}$$

vý je pre nás len vzťah (11-38), nakoľko pasívny štvorpól naprázdno sa
dukuje na pasívny dvojpól, a z tejto predstavy jednoducho plynú všetky
stnosti parametrov Z_{11} a Z_{22}. Vzťah (11-38), ktorý udáva vzťahy medzi
zíduami k_{11}, k_{22} a k_{12}, sa nazýva reziduovou podmienkou.

Uvažujme teraz dvojbránu v zapojení podľa obr. 172. Ako vidieť,



Obr. 172

jeho výstupné svorky sú rozpojené, t. j. $I_2 = 0$.
Impedančné rovnice sa v tomto prípade zjednodušia na tvar

$$U_1 = z_{11} I_1$$
$$U_2 = z_{12} I_1 = Z_{21} I_1 \qquad (11\text{-}39)$$

tom, pre prenos napätia U_2/U_1 platí

$$U_2/U_1 = \frac{z_{12} I_1}{z_{11} I_1} = \frac{z_{12}}{z_{11}} = -\frac{y_{12}}{y_{22}} = T_{12}(p) \qquad (11\text{-}40)$$

pri charakterizovaní vlastností pasívnych dvojbrán, ako aj

nkcia $T_{12}(p)$, má značný význam v oblasti realizácie pasívnych
vojbrán. Analýza vlastností pasívnych dvojbrán ukazuje, že
fcie $T_{12}(p)$

Z toho

$$Y = \begin{bmatrix} 1/Z & -1/Z \\ -1/Z & 1/Z \end{bmatrix} \quad \text{kde} \quad Z = Z_1 + Z_2$$

Nakoľko $\det Z = 1/Z^2 - 1/Z^2 = 0$, neexistuje Y, nakoľko $Y = Z^{-1}$.

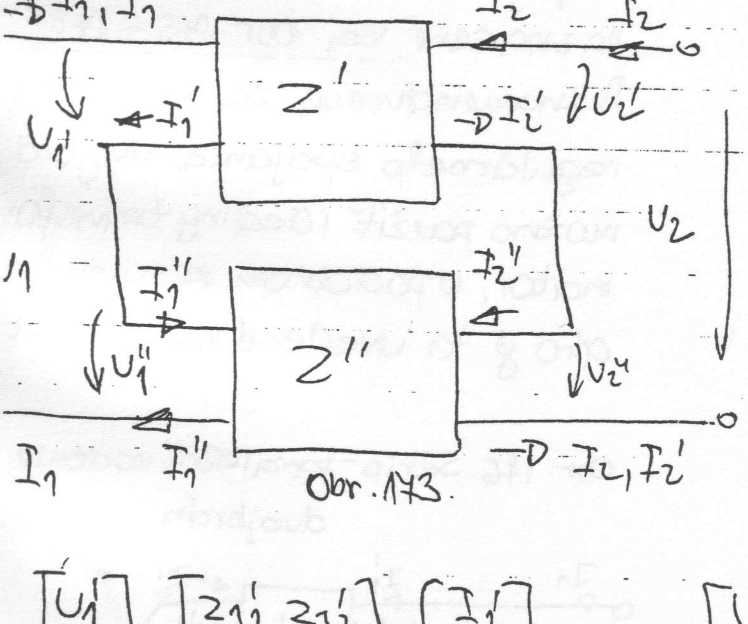
$$U_1 = Z_1 I_1 + U_2 = -Z_1 I_2 + U_2 = U_2 - Z_1 I_2$$
$$+I_1 = -I_2 = \qquad\qquad = 0 - I_2$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Praktický význam týchto dvojbrán spočíva v tom, že ich vhodným spojením obdržíme zložitejšie dvojbrány, bežne aplikované v praxi.

11.4. Radenie dvojbrán.

O radení dvojbrán budeme hovoriť vtedy, ak výsledný útvar zapojenia dvojbrán bude opäť dvojbrána, pričom v každej bráne pretekajúce prúdy nájdeme bez zmeny veľkosti v oboch svorkách príslušnej dvojice. Toto zapojenie, ktoré vyhovuje tejto podmienke, nazývame regulárne. Uvažujme zapojenie dvoch dvojbrán podľa obr. 173. Uvedené zásady radenia budú splnené, ak zaistíme rovnosť prúdov



Obr. 173.

$$I_1 = I_1' = I_1''$$
$$I_2 = I_2' = I_2'' \qquad (11\text{-}41)$$

Pre každú dielčiu dvojbránu môžeme písať impedančné rovnice v tvare

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}' & Z_{12}' \\ Z_{21}' & Z_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}'' & Z_{12}'' \\ Z_{21}'' & Z_{22}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} \qquad (11\text{-}42)$$

a nakoľko platí:

$$U_1 = U_1' + U_1''$$
$$U_2 = U_2' + U_2'' \qquad (11\text{-}43)$$

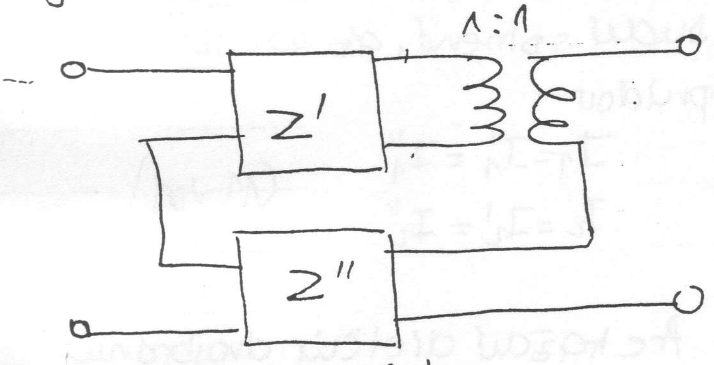
Dosadením (11-42) do (11-43), pri uvážení (11-41) dostávame:

$$\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_1'+U_1''\\U_2'+U_2''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_1'\\U_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}U_1''\\U_2''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11}' & Z_{12}'\\Z_{21}' & Z_{22}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1'\\I_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Z_{11}'' & Z_{12}''\\Z_{21}'' & Z_{22}''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1''\\I_2''\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}Z_{11}'+Z_{11}'' & Z_{12}'+Z_{12}''\\Z_{21}'+Z_{21}'' & Z_{22}'+Z_{22}''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}\qquad(11-44)$$

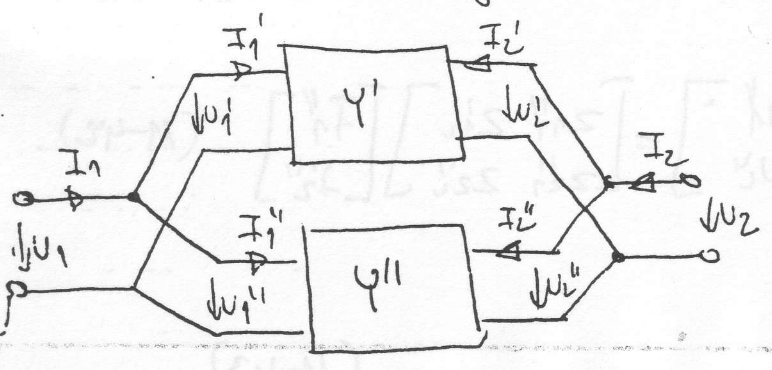
t. j. $$Z = Z' + Z'' \qquad (11-45)$$

Z obr. 173 vidieť, že vstupné, resp. výstupné brány dielčích dvojbrán sú zapojené tak, ako svorky dvojpólov pri sériovom radení. Preto radenie dvojbrán podľa obr. 173 nazývame sériovým radením dvojbrán. Výsledná impedančná maticu určíme podľa vzťahu (11-45). Poznamenávame, že regulárnosť spojenia dvojbrán môžeme pre teoretické úvahy zabezpečiť zapojením ideálneho transformátora s prevodom 1:1 na niektorú z brán spojených dvojbrán, ako je to nakreslené na obr. 174. Ďalšie typické ~~zap~~ spôsoby zapojovania dvojbrán sú naznačené na obr. 175 ÷ 178. Poznamenávame, že za účelom regulárneho spájania dvojbrán možno použiť ideálny transformátor, v podobnom zapojení, ako je to uvedené na obr. 174.



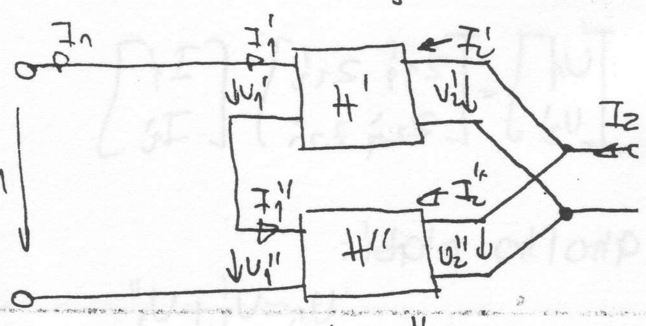
Obr. 174.

Paralelené radenie dvojbrán obr. 175



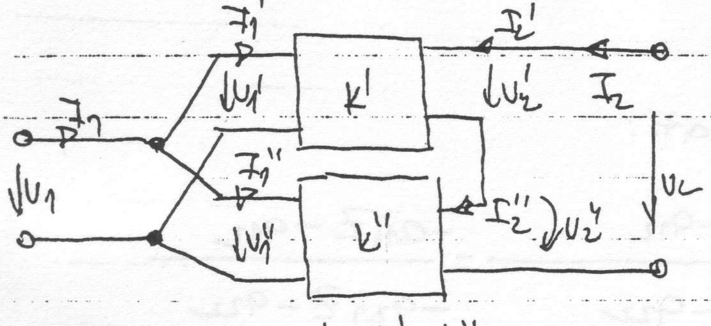
$Y = Y' + Y''$

Obr. 176 Sério-paralelné radenie dvojbrán



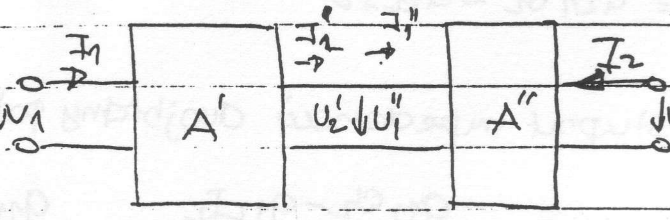
$H = H' + H''$

obr. 147. Paralelno-sériové zapojenie dvojbrán



$K = K' + K''$

obr. 148. kaskádne radenie dvojbrán



$A = A' \cdot A''$

Metódy radenia dvojbrán, naznačené na obr. 143 ÷ obr. 148, možno efektívne aplikovať v prípade stanovovania maticových charakteristík zložitých dvojbrán, na základe známych maticových charakteristík jednoduchých dvojbrán. ...

11.5. Obrazová impedancia dvojbrán.

Obrazová impedancia dvojbrány je definovaná ako geometrický priemer impedancií na vstupnej alebo na výstupnej bráne, ak je druhá brána raz naprázdno, potom nakrátko, t.j.:

$$Z_{01} = \sqrt{Z_{1p} Z_{1k}} \qquad Z_{02} = \sqrt{Z_{2p} Z_{2k}} \qquad (11-46)$$

kde:

Z_{p1} je vstupná impedancia naprázdno (vstupnej brány)
Z_{k1} je vstupná impedancia nakrátko (vstupnej brány)
Z_{p2} je vstupná impedancia naprázdno (výstupnej brány)
Z_{k2} je vstupná impedancia nakrátko (výstupnej brány)

Z_{01} ... obrazová impedancia z ľavej strany ~~(zo vstupnej brány)~~ zo strany vstupnej brány
Z_{02} ... obrazová impedancia z pravej strany (z výstupnej brány). zo strany výstupnej brány

Predpokladajme, že vyšetrovaný štvorpól je zaťažený impedanciou Z na výstupnej bráne, pričom je opísaný kaskádnymi rovnicami. Potom platí:

$$U_1 = a_{11} U_2 + a_{12} I_2 \qquad (11\text{–}47)$$
$$I_1 = a_{21} U_2 - a_{22} I_2$$

e vstupnú impedanciu duojbrany potom platí:

$$Z_{VST} = U_1/I_1 = \frac{a_{11}U_2 - a_{12}I_2}{a_{21}U_2 - a_{22}I_2} = \frac{a_{11}\frac{U_2}{I_2} - a_{12}}{a_{21}\frac{U_2}{I_2} - a_{22}} = \frac{-a_{11}Z - a_{12}}{-a_{21}Z - a_{22}}$$

$$Z_{VST} = \frac{a_{11}Z + a_{12}}{a_{21}Z + a_{22}} \qquad (11\text{–}48)$$

Použitím (11–48) môžmo Z_{1p} a Z_{1k} vypočítať takto:

$$Z_{1p} = \lim_{Z\to\infty} Z_{VST} = \frac{a_{11}}{a_{21}} \qquad Z_{1k} = \lim_{Z\to 0} Z_{VST} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \qquad (11\text{–}49)$$

Dosadením (11–49) do (11–46) dostávame pre vyjadrenie obrazovej impedancii Z_{01} tento výraz:

$$Z_{01} = \sqrt{Z_{1p}Z_{1k}} = \sqrt{\frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}\,a_{22}}} \qquad (11\text{–}50).$$

Podobný postup môžmo zvoliť pre výpočet Z_{02}:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ +I_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}}$$

$$\left.\begin{aligned} U_2 &= \frac{a_{22}}{\det A}U_1 - \frac{a_{12}}{\det A}I_1 \\ I_2 &= \frac{a_{21}}{\det A}U_1 - \frac{a_{11}}{\det A}I_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{U_2}{I_2} = \frac{\frac{a_{22}}{\det A}U_1 - \frac{a_{12}}{\det A}I_1}{\frac{a_{21}}{\det A}U_1 - \frac{a_{11}}{\det A}I_1} = \frac{-a_{22}Z - a_{12}}{-a_{21}Z - a_{11}}$$

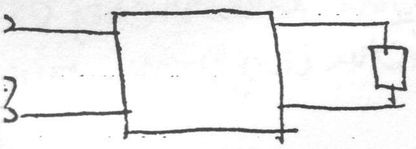
$$\frac{U_2}{I_1} = \frac{a_{22}Z + a_{12}}{a_{21}Z + a_{11}} \Rightarrow Z_{2p} = \frac{a_{22}}{a_{21}} \quad Z_{2k} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \Rightarrow \boxed{Z_{02} = \sqrt{\frac{a_{22}a_{12}}{a_{21}\,a_{11}}}} \quad (11\text{–}5

a výpočet obrazových impedancií možno teda použiť vzťahy (11-50) a (11-51). Zaťažme teraz výstupnú bránu dvojbrány obrazovou impedanciou Z_{o2}. Potom, pre vstupnú impedanciu dvojbrány dostávame:

$$Z_{vst} = \frac{a_{11}Z_{o2}+a_{12}}{a_{21}Z_{o2}+a_{22}} = \frac{a_{11}\sqrt{\frac{a_{22}a_{12}}{a_{21}a_{11}}}+a_{12}}{a_{21}\sqrt{\frac{a_{22}a_{12}}{a_{21}a_{11}}}+a_{22}} = \frac{\sqrt{a_{11}a_{12}}}{\sqrt{a_{21}a_{22}}}\,\frac{\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{12}}}\cdot\sqrt{\frac{a_{22}a_{12}}{a_{21}a_{11}}}+\sqrt{\frac{a_{12}}{a_{11}}}}{\sqrt{\frac{a_{21}}{a_{22}}}\sqrt{\frac{a_{22}a_{12}}{a_{21}a_{11}}}+\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{21}}}}$$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}a_{22}}}}_{Z_{o1}}\,\frac{\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{21}}}+\sqrt{\frac{a_{12}}{a_{11}}}}{\sqrt{\frac{a_{12}}{a_{11}}}+\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{21}}}} = Z_{o1} \qquad (11\text{-}52)$$

Z vzťahu (11-52) vidíme, že ak dvojbránu zaťažíme na výstupu jej obrazovou impedanciou (teraz Z_{o2}) ~~z~~ výstupnej brány, tak vstupná impedancia dvojbrány je rovná obrazovej impedancii dvojbrány z vstupnej brány. (obr. 179).



Obr. 179.

Ak zaťažíme dvojbránu ~~impedancii~~ na vstupnej bráne obrazovou impedanciou Z_{o1}, tak pre vstupnú impedanciu dvojbrány, z hľadiska výstupnej brány platí:

$$Z'_{vst} = \frac{a_{22}Z_{o1}+a_{12}}{a_{21}Z_{o1}+a_{11}} = \frac{a_{22}\sqrt{\frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}a_{22}}}+a_{12}}{a_{21}\sqrt{\frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}a_{22}}}+a_{11}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_{22}a_{12}}}{\sqrt{a_{21}a_{11}}}\,\frac{\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{12}}}\sqrt{\frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}a_{22}}}+\sqrt{\frac{a_{12}}{a_{22}}}}{\sqrt{\frac{a_{21}}{a_{11}}}\sqrt{\frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}a_{22}}}+\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{21}}}} = Z_{o2}\,\frac{\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{21}}}+\sqrt{\frac{a_{12}}{a_{22}}}}{\sqrt{\frac{a_{12}}{a_{22}}}+\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{21}}}}$$

$$Z'_{vst} = Z_{o2} \qquad (11\text{-}53)$$

Z vzťahu (11-53) vidíme, že ak dvojbránu zaťažíme na ~~výstupe~~ vstupe obrazovou impedanciou korešpondujúcou vstupnej bráne, tak

vstupná impedancia dvojbrány je rovná obrazovej impedancii dvo
z výstupnej brány.

Ak je dvojbrána pozdĺžne súmerná, tak platí:

$$a_{11} = a_{22} \qquad (11-54)$$

Dosadením (11-54) do (11-50) a (11-51), zisťujeme, že dvoj
na je potom charakterizovaná jednou obrazovou impedanciou

$$Z_0 = Z_{01} = Z_{02} = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}} \qquad (11-55)$$

Ak zaťažíme dvojbránu jej obrazovou impedanciou, hovoríme, že
dvojbrána je impedančne prispôsobená. Znamená to, že pri prenose
energie elektr. zo vstupu na výstup dvojbrány nenastávajú odrazy

Poznamenávame, že samotná obrazová impedancia neurčuje
jednoznačne prenosové vlastnosti dvojbrány. Pretože obrazová
impedancia nič nehovorí o podmienkach prenosu elektrickej en
cez dvojbránu, druhým prvkom charakterizujúcim dvojbránu, mus
byť nejaká miera prenosu.

11.6. Prenosové charakteristiky dvojbrán.

vojbrana býva akýmsi medzičlánkom, ktorá je vložená medzi zdrojom lektrickej energie (pripojeným ku vstupnej bráne) a spotrebičom (pripojeným k výstupnej bráne). Tento medzičlánok ovplyvňuje prenos elektrickej energie ko zdroja spotrebiča. Činiteľ prenosu dvojbrány je definovaný ako pomer

$$\frac{\text{výstupná veličina}}{\text{vstupná veličina}}$$

uvedenými veličinami môžu byť napätia, prúdy alebo výkony na vstupe a výstupe dvojbrány.

Činiteľa prenosu napätia (alebo prenos napätia) označíme symbolom $= U_2/U_1$, týmto činiteľ prenosu prúdu (prenos prúdu) je často definovaný vzťahom $K_I = I_2/(-I_1)$. Činiteľ prenosu výkonu (prenos výkonu) je pri harmonickom napájaní definovaný vzťahom

$$K_p = K_u K_I = \frac{U_2(-I_2)}{U_1 \quad I_1} \qquad (11-56)$$

praxi sa veľmi často používa logaritmus prevrátenej hodnoty činiteľa prenosu výkonu. Táto veličina, definovaná vzťahom

$$g = \frac{1}{2}\ln G = \cancel{\ldots} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{K_I K_u} = \frac{1}{2}\ln|G|e^{j\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|G| + \frac{1}{2}\alpha j = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}\right| + j\frac{\alpha}{2} =$$

$$= b + j a \qquad (11-57)$$

de

$$b = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}\right| \qquad a = \frac{\alpha}{2} \qquad (11-58)$$

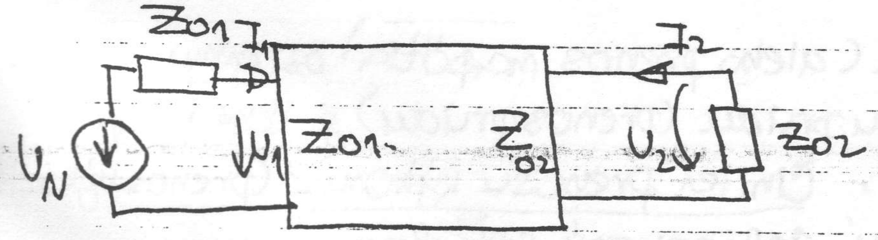
Veličina g sa nazýva mierou prenosu, veličina b sa nazýva mierou útlmu a veličina a sa nazýva mierou posuvu. Mieru posuvu vyjadrujeme v radiánoch alebo v stupňoch. ~~.....~~ Jednotkou miery útlmu definovanou vzťahom (11-59) je Np. Miera útlmu môže byť definovaná aj jednotkou dB, a to takto:

$$b = 10 \log \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} \quad [dB] \qquad (11\text{-}59)$$

Dá sa jednoducho ukázať, že medzi jednotkami Np a dB platí táto súvislosť:

$$1\,Np = 8{,}686\ dB \qquad 1\,dB = 0{,}115\ Np \qquad (11\text{-}60).$$

11.4 Obrazová miera prenosu.



Obr. 180

Zaťažme dvojbran jej obrazovou impedanciou z výstupnej strany Z_{02} (obr. 180). Vstupná impedancia je potom rovná Z_{01}. Obrazová miera prenosu je potom daná vzťahom

$$g_{01} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 (-I_2)} = b_{01} + j a_{01} \qquad (11\text{-}61)$$

Z obr. 180 vidíme, že platia tieto vzťahy:

$$I_1 = U_1 / Z_{01} \qquad I_2 = -U_2 / Z_{02} \qquad (11\text{-}62)$$

Po dosadení (11-62) do (11-61) dostávame:

$$g_{01} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1^2 / Z_{01}}{U_2^2 / Z_{02}} = \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{U_1}{U_2} \right)^2 \frac{Z_{02}}{Z_{01}} \right] = \ln \frac{U_1}{U_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \ln \frac{U_1}{U_2} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \qquad (11\text{-}63)$$

Prenos napätia je definovaný vzťahom

$$U_1 = a_{11} U_2 + a_{12} (-I_2) = a_{11} U_2 + a_{12} U_2 / Z_{02} \qquad (11\text{-}64)$$

Odkiaľ dostávame

$$\frac{U_1}{U_2} = a_{11} + a_{12} \frac{1}{Z_{02}} = \frac{a_{11} Z_{02} + a_{12}}{Z_{02}} \qquad (11\text{-}65)$$

Dosadením (11-65) do (11-63) dostaneme pre obrazovú mieru prenosu tento vzťah:

$$g_{01} = \ln \frac{a_{11}Z_{02}+a_{12}}{Z_{02}}\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} = \ln \frac{a_{11}Z_{02}+a_{12}}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} =$$

$$= \ln \frac{a_{11}\sqrt{\frac{a_{22}a_{12}}{a_{11}a_{21}}}+a_{12}}{\sqrt[4]{\frac{a_{22}a_{12}}{a_{11}a_{21}}\cdot\frac{a_{11}a_{12}}{a_{22}a_{21}}}} = \ln \frac{a_{11}\sqrt{\frac{a_{22}a_{12}}{a_{11}a_{21}}}+a_{12}}{\sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}} =$$

$$= \ln \frac{\sqrt{a_{11}a_{22}a_{12}}+a_{12}\sqrt{a_{21}}}{\sqrt{a_{12}}} = \ln\left(\sqrt{a_{11}a_{22}}+\sqrt{a_{12}a_{21}}\right) \qquad (11-66).$$

Pre obrazovú mieru prenosu dvojbrány z výstupnej brány na vstupnú dostaneme:

$$g_{02} = \frac{1}{2}\ln\frac{U_2 I_2}{U_1(-I_1)} = \frac{1}{2}\ln\frac{U_2\frac{U_2}{Z_{02}}}{U_1\frac{U_1}{Z_{01}}} = \frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2\cdot\left(\frac{Z_{01}}{Z_{02}}\right)\right] =$$

$$= \ln\frac{U_2}{U_1}\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \qquad (11-67)$$

Pre napätie U_2, možno pomocou spätných kaskádnych rovníc písať tento vzťah:

$$U_2 = b_{11}U_1 + b_{12}(-I_1) = a_{22}U_1 + a_{12}(-I_1) = a_{22}U_1 + a_{12}U_1/Z_{01} =$$

$$= U_1\frac{a_{22}Z_{01}+a_{12}}{Z_{01}} \qquad (11-68)$$

Dosadením (11-68) do (11-67) dostávame:

$$g_{02} = \ln\frac{Z_{01}a_{22}+a_{12}}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} = \ln\frac{a_{22}\sqrt{\frac{a_{11}a_{12}}{a_{22}a_{21}}}+a_{12}}{\sqrt[4]{\frac{a_{22}a_{12}}{a_{11}a_{21}}\frac{a_{11}a_{12}}{a_{22}a_{21}}}} =$$

$$= \ln\left[\sqrt{a_{11}a_{22}}+\sqrt{a_{21}a_{12}}\right] \qquad (11-69)$$

Ako vidieť zo vzťahov (11-65) a (11-69), platí:

$$g_{\phi 1} = g_{\phi 2} = g_{\phi} \qquad (11\text{-}70)$$

Definícia obrazovej miery prenosu dovoľuje použitie hyperbolických funkcií s komplexným argumentom na vyjadrenie prvkov kaskádnej matice. Keďže

$$e^{g\phi} = \sqrt{a_{11}a_{22}} + \sqrt{a_{12}a_{21}} \qquad (11\text{-}71)$$

je prevrátená hodnota

$$e^{-g\phi} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}} + \sqrt{a_{12}a_{21}}} = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22}} - \sqrt{a_{12}a_{21}}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_{11}a_{22}} - \sqrt{a_{12}a_{21}}}{\det A} = \sqrt{a_{11}a_{22}} - \sqrt{a_{12}a_{21}} \qquad (11\text{-}72)$$

kde sme využili tú skutočnosť, že pre pasívne ~~prvky~~ dvojbrany platí $\det A = 1$.

Z rovníc (11-71) a (11-72) môžeme vypočítať:

$$\sinh g\phi = \frac{1}{2}\left(e^{g\phi} - e^{-g\phi}\right) = \sqrt{a_{12}a_{21}} \qquad (11\text{-}73)$$

$$\cosh g_{\alpha} = \frac{1}{2}\left(e^{g\phi} + e^{-g\phi}\right) = \sqrt{a_{11}a_{22}}$$

Nakoľko platí:

$$Z_{\phi 1} = \sqrt{\frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}a_{22}}} \qquad Z_{\phi 2} = \sqrt{\frac{a_{22}a_{12}}{a_{11}a_{21}}} \qquad (11\text{-}74)$$

Vypočítajme výraz:

$$\cancel{Z_{\phi 2}/Z_{\phi 1} = \sqrt{\frac{a_{22}a_{12}}{a_{11}a_{21}} \cdot \frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}a_{22}}} = \frac{a_{12}}{a_{21}}}$$

Pri použití vzťahov (11-74) možno prvky kaskádnej matice pasívnej dvojbrany vypočítať takto:

$$\cosh g_0 = \sqrt{a_{11}a_{22}} \Rightarrow \boxed{a_{11}} = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \cosh g_0 = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} \cosh g_0 =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{a_{11} \cdot a_{12}}{a_{22}\, a_{21}} \; \frac{a_{11}\, a_{21}}{a_{22}\, a_{12}}} \cosh g_0 = \underline{\underline{\sqrt{Z_{01}/Z_{02}} \cosh g_0}} \qquad (11\text{-}75)$$

$$a_{22} = \frac{a_{22}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \cosh g_0 = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \cosh g_0 = \sqrt[4]{\frac{a_{22}\, a_{12}}{a_{11}\, a_{21}} \; \frac{a_{22}\, a_{21}}{a_{11}\, a_{12}}} \cosh g_0 =$$

$$= \sqrt{Z_{02}/Z_{01}} \cosh g_0. \qquad (11\text{-}76)$$

$$a_{12} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}a_{21}}} \sinh g_0 = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}} \sinh g_0 = \sqrt[4]{\frac{a_{12}\, a_{11}}{a_{21}\, a_{22}} \; \frac{a_{12}\, a_{22}}{a_{21}\, a_{11}}} \sinh g_0 =$$

$$= \sqrt{Z_{01} Z_{02}} \sinh g_0 \qquad (11\text{-}77)$$

$$a_{21} = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{12}a_{21}}} \sinh g_0 = \sqrt{\frac{a_{21}}{a_{12}}} \sinh g_0 = \sqrt[4]{\frac{a_{21}\, a_{22}}{a_{12}\, a_{11}} \; \frac{a_{21}\, a_{11}}{a_{12}\, a_{22}}} \sinh g_0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Z_{01} Z_{02}}} \sinh g_0 \qquad (11\text{-}78).$$

Vzťahy (11-75) ÷ (11-78) reprezentujú vyjadrenie prvkov kaskádnej matice súmernej dvojbrany pomocou obrazových impedancií a obrazovej miery prenosu. Pre súmernú dvojbranu, kde

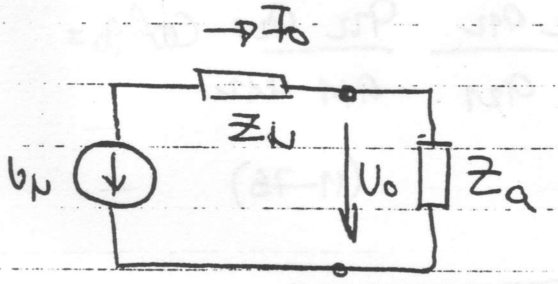
$$Z_{01} = Z_{02} = Z_0 \qquad (11\text{-}79)$$

sa vzťahy (11-75) ÷ (11-78) zjednodušia nasledovne:

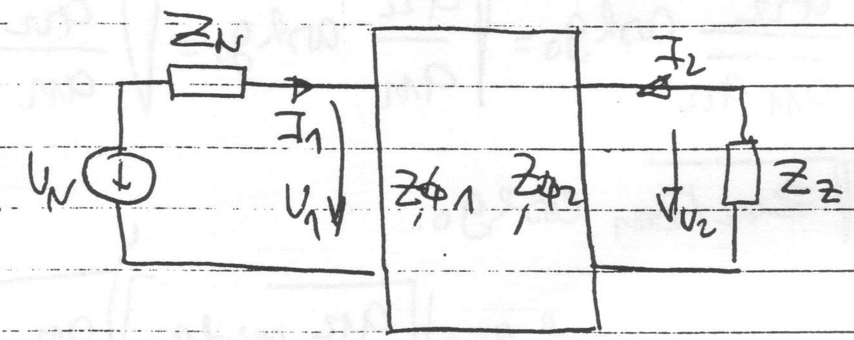
$$A = \begin{bmatrix} \cosh g_0 & Z_0 \sinh g_0 \\ \dfrac{\sinh g_0}{Z_0} & \cosh g_0 \end{bmatrix} \qquad (11\text{-}80)$$

Na záver tohoto odseku poznamenávame, že prezentovaná teória obrazovej impedancie a obrazovej miery prenosu predstavuje teoretický základ Zobelových k-filtrov.

11.8. Prevádzková, vložená a styková miera prenosu.



Obr. 181



Obr. 182

Ak nie je dvojbrána impedančne prispôsobená ani na vstupnej, ani na výstupnej bráne, t.j. ak $Z_Z \neq Z_{\phi 2}$ a $Z_N \neq Z_{\phi 1}$ (Obr. 182) vzniká dodatočný útlm, impedančným neprispôsobením. V tomto prípade definujeme mieru prenosu takto:

$$g = \frac{1}{2}\ln\frac{I_0 U_0}{(-I_2)U_2} \qquad (11-81)$$

kde $U_0 I_0$ je žiadaný výkon, ktorý by dodával zdroj do záťaže Z_a priamo (Obr. 181), kým $U_2(-I_2)$ je výkon dodaný do záťaže cez dvojbránu (Obr. 182). Ak je

$$Z_a = Z_N \qquad (11-82)$$

tak rovnica (11-81) definuje tzv. prevádzkovú mieru prenosu. V tomto prípade platí:

$$g = \frac{1}{2}\ln\frac{I_0 U_0}{(-I_2)U_2} = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{U_N}{2Z_N}\cdot\frac{U_N}{2}}{(-I_2)(-I_2)Z_Z} = \frac{1}{2}\ln\frac{U_N^2}{4Z_N}\,\frac{1}{(-I_2)^2 Z_Z} =$$

$$= \ln\frac{U_N}{2(-I_2)\sqrt{Z_N Z_Z}} \qquad (11-83)$$

ak je

$$Z_a = Z_z \qquad (11-84)$$

tom vzťah (11-81) je definíciou vloženej miery prenosu. Pretože podľa obr. 181

bi

$$I_0 = \frac{U_N}{Z_N + Z_Z} \qquad (11-85)$$

dostaneme definičný vzťah pre vloženú mieru prenosu

$$g_v = \frac{1}{2} \ln \frac{U_0 I_0}{U_2(-I_2)} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{U_N}{Z_N+Z_Z} \cdot \frac{U_N Z_Z}{Z_N+Z_Z}}{(-I_2)^2 Z_Z} = \ln \frac{U_N}{(Z_N+Z_Z)(-I_2)} =$$

$$= \ln \frac{U_N}{2(-I_2)\sqrt{Z_N Z_Z}} \cdot \frac{2\sqrt{Z_N Z_Z}}{Z_N+Z_Z} = \underbrace{\ln \frac{U_N}{2(-I_2)\sqrt{Z_N Z_Z}}}_{g} - \underbrace{\ln \frac{Z_N+Z_Z}{2\sqrt{Z_N Z_Z}}}_{g_{st}} =$$

$$= g - \ln \frac{Z_N+Z_Z}{2\sqrt{Z_N Z_Z}} = g - g_{st} \qquad (11-86)$$

de g_{st} je tzv. styková miera prenosu, ktorá je definovaná takto:

$$g_{st} = \ln \frac{Z_N + Z_Z}{2\sqrt{Z_N Z_Z}} \qquad (11-89)$$

yjadríme teraz mieru prenosu (vloženú). Z rovníc

$$\begin{aligned} U_1 &= U_N - Z_N I_1 \\ U_2 &= (-I_2) Z_Z \\ U_1 &= a_{11} U_2 - a_{12} I_2 \\ I_1 &= a_{21} U_2 - a_{22} I_2 \end{aligned} \qquad (11-90)$$

vypočítame U_N ako funkciu I_2 takto:

$$\begin{aligned} U_N &= U_1 + Z_N I_1 = a_{11} U_2 - a_{12} I_2 + a_{21} U_2 Z_N - a_{22} I_2 Z_N = \\ &= -a_{11} Z_Z I_2 - a_{12} I_2 - a_{21} Z_N Z_Z I_2 - a_{22} Z_N I_2 = \\ &= (a_{11} Z_Z + a_{12} + a_{21} Z_N Z_Z + a_{22} Z_N)(-I_2) \end{aligned} \qquad (11-91)$$

Keď dosadíme sem za prvky kaskádnej matice výrazy (11-75)÷(11-78), dostaneme po nahradení hyperbolických funkcií exponenciálnymi funkciami a po jednoduchej úprave:

$$\frac{U_N}{(-I_2)} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}(Z_2+Z_{02})(Z_N+Z_{01})e^{g_0}\left[1-\frac{Z_2-Z_{02}}{Z_2+Z_{02}}\cdot\frac{Z_N-Z_{01}}{Z_N+Z_{01}}e^{-2g_0}\right] \qquad (11\text{-}92)$$

Označme

$$S_2 = \frac{Z_2-Z_{02}}{Z_2+Z_{02}} \qquad S_1 = \frac{Z_N-Z_{01}}{Z_N+Z_{01}} \qquad (11\text{-}93)$$

kde S_1 a S_2 ... sú činitele odrazov na výstupnej a vstupnej bráne. Po dosadení (11-93) do (11-92) a potom (11-92) do (11-86) dostaneme:

$$g_v = \ln\frac{(Z_2+Z_{02})(Z_N+Z_{01})e^{g_0}\left[1-S_1S_2e^{-2g_0}\right]}{2\sqrt{Z_{01}Z_{02}}\;(Z_N+Z_2)} \qquad (11\text{-}94)$$

Čitateľa aj menovateľa (11-94) vynásobíme výrazom $2\sqrt{Z_NZ_2}$ a logaritmus rozložíme. Potom dostaneme:

$$g_v = g_0 + \ln\frac{Z_N+Z_{01}}{2\sqrt{Z_NZ_{01}}} + \ln\frac{Z_2+Z_{02}}{2\sqrt{Z_2Z_{02}}} - \ln\frac{Z_N+Z_2}{2\sqrt{Z_NZ_2}} + \ln\left[1-S_1S_2e^{-2g_0}\right]$$

t.j.

$$g_v = g_0 + \underbrace{g_1} + \underbrace{g_2} - \underbrace{g_3} + g_4 \qquad (11\text{-}95)$$

pretože $g = b + j\alpha$

tak každá miera prenosu má svoju mieru útlmu (b) a mieru posunu (α).

V vzťahu (11-95) je:

b_0 ... obrazový útlm

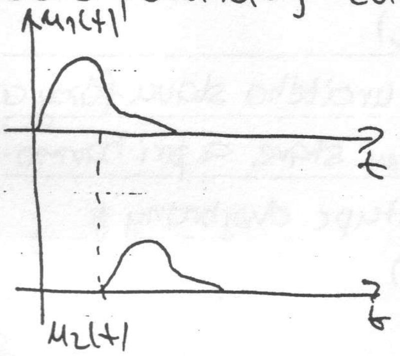
b_1, b_2 ... stykové útlmy spôsobené neprispôsobením dvojbrany a impedancií na vstupe a výstupe

... je stykový útlm spôsobený neprispôsobením výstupnej impedancie zdroja a zaťažovacej impedancie

... je útlm, ktorý vzniká vzájomnou interakciou odrazov na vstupnej a

.9. Dvojbrána ako ideálny prenosový článok

Za ideálny prenosový článok budeme považovať taký dvojbrán, u ktorej je signál na výstupnej bráne rovnaký tvar ako signál na vstupnej bráne. Môže mať ale inú mierku (môže byť zoslabený alebo zosilnený) a môže byť časovo posunutý (oneskorený) (Obr.183). Keď označíme vstupný signál $u_1(t)$ a



Obr.183 ...

výstupný signál $u_2(t)$, potom uvedenú požiadavku môžeme formulovať v tvare

$$u_2(t) = A u_1(t - t_0) \qquad (11\text{-}96)$$

kde A je kladná alebo záporná nenulová konštanta, konečnej veľkosti

$$0 < |A| < \infty \qquad (11\text{-}97)$$

a to je kladná konštanta (výstupný signál nemôže predbiehať vstupný signál). Keď na (11-97) aplikujeme Fourierovu transformáciu, dostávame

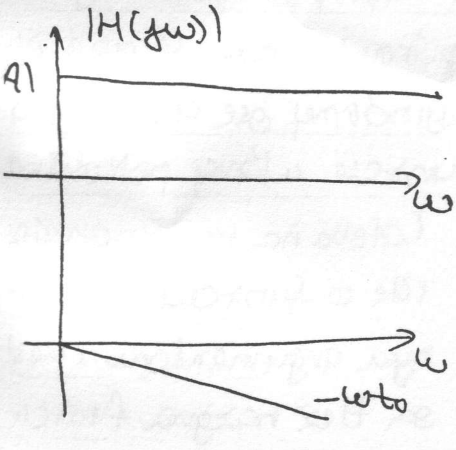
$$U_2(j\omega) = A e^{-j\omega t_0} U_1(j\omega) \qquad (11\text{-}98)$$

Ako pre frekvenčnú charakteristiku ideálneho prenosového článku dostávame

$$H(j\omega) = U_2(j\omega)/U_1(j\omega) = A e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)} \qquad (11\text{-}99)$$

:

$$|H(j\omega)| = |A| \qquad \varphi(\omega) = -\omega t_0 \qquad (11\text{-}100)$$



Obr.184

Ako vidieť zo vzťahu (11-100), AFCH ideálneho prenosového článku je priamka rovnobežná s osou frekvencií teoreticky v rozsahu $0 \leq \omega < \infty$ (prakticky len na šírke spektra prenášaného signálu). FFCH ideálneho prenosového článku je lineárna, a je reprezentovaná priamkou prechádzajúcou počiatkom súradnej sústavy, ktorá má zápornú smernicu t_0. Obidve charakteristiky ideálneho prenosového článku sú naznačené na obr. 184.

Strmosť lineárna

0. Skupinové a fázové oneskorenie

Ďalšou mierkou pre určenie oneskorenia signálov pri prechode cez dvojbránu je skupinové oneskorenie, definované vzťahom

$$t_s = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \qquad (11\text{-}101)$$

kde $\varphi(\omega)$ je FFCH. t_s určuje čas potrebný k prenosu signálu, ktorého spektrum je rozložené v limitnej blízkosti určitej frekvencie ω.

Ďalším pojmom je tzv. fázové oneskorenie, ktoré je definované vzťahom

$$t_f = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} \qquad (11\text{-}102)$$

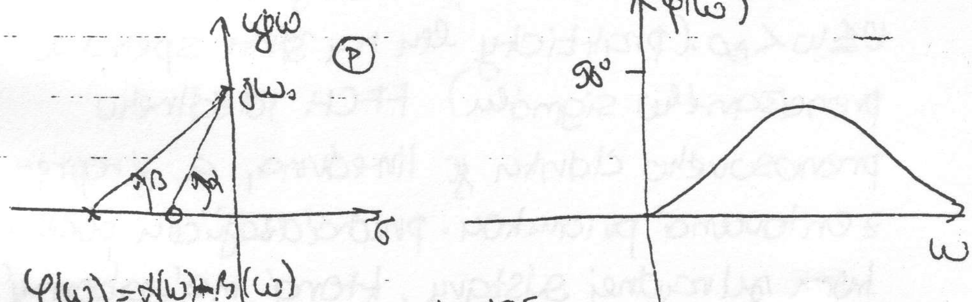
Fázové oneskorenie vyjadruje čas potrebný na prenos určitého stavu fázy cez dvojbránu zatomčenú zvolenou impedanciou v ustálenom stave a pri harmonickom napájaní. (Fáza harmonického signálu na výstupe dvojbrány je oneskorená oproti vstupnému signálu o hodnotu ωt_f).

11.11. Dvojbrány s minimálnym a neminimálnym argumentom prenosovej funkcie

Prenosovú funkciu dvojbrány, ktorá obsahuje len členy so sústredenými parametrami, možno vyjadriť v tomto tvare:

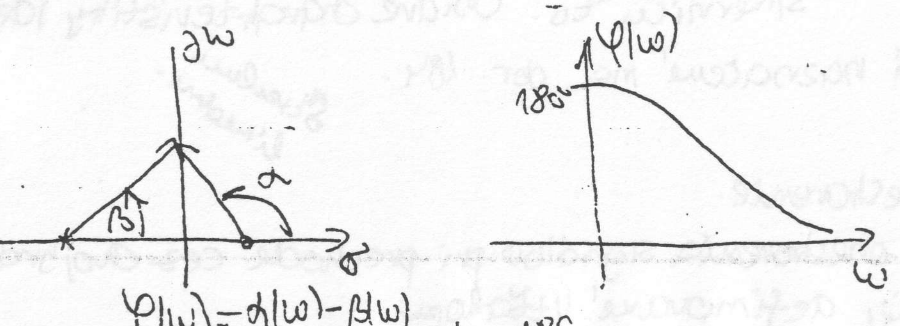
$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0} \qquad (11\text{-}103)$$

Ako vieme z predchádzajúcich odsekov, póly funkcie $H(p)$, zodpovedajúce stabilným sústavám musia ležať v ľavej otvorenej polrovine komplexnej čísl... nulové body $H(p)$ môžu ležať v ľavej polrovine, na imaginárnej osi alebo v pravej polrovine. Ak ležia nulové body prenosovej funkcie v ľavej polrovine (alebo na imaginárnej osi), ide o funkciu s minimálnym argumentom. Často sa tiež nazýva funkcia s minimálnou fázou (obr. 185). Ak leží aspoň jeden nulový bod $H(p)$ v pravej polrovine, jedná sa o funkciu s neminimálnym argumentom (neminimálnou fázou).



$\varphi(\omega) = \alpha(\omega) + \beta(\omega)$

obr. 185

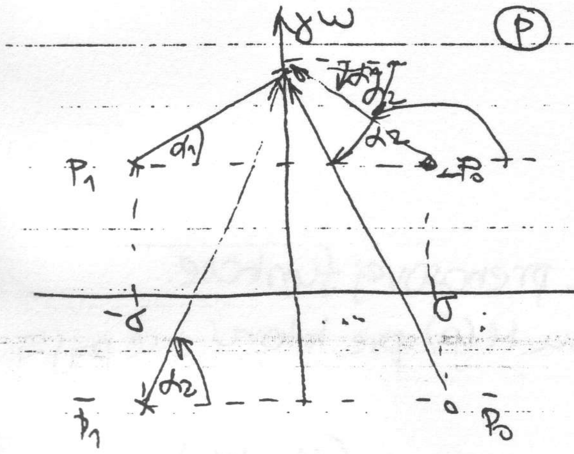


$\varphi(\omega) = \alpha(\omega) - \beta(\omega)$

obr. 186

1.12. Fázovacie články

definíciou dvojbrany s minimálnou fázou úzko súvisí definícia dvojbrany prenosovou funkciou fázovacieho článku. Prenosovú funkciu fázovacej dvojbrany má dvojbrana, ktorej póly ležia v ľavej polrovine a nulové body sú zrkadlovým obrazom pólov vzhľadom k imaginárnej osi. Uvažujme dvojbranu, ktorej zodpovedajúci diagram pólov a núl je naznačený na Obr. 187. Prenosová funkcia tejto dvojbrany má tvar:



Obr. 184.

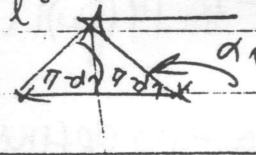
$$H(p) = \frac{(p+p_0)(p+\bar{p}_0)}{(p+p_1)(p+\bar{p}_1)} \qquad (11\text{-}103).$$

keďže platí:

$$p_0 = -\bar{p}_1 \qquad \bar{p}_0 = -p_1$$

tak (11-103) možno vyjadriť tiež takto:

$$H(p) = \frac{(p-\bar{p}_1)(p-p_1)}{(p+\bar{p}_1)(p+p_1)} = \frac{|p_1|\, e^{j(\pi-\alpha_1)}\ |\bar{p}_1|\, e^{j(\pi-\alpha_2)}}{|p_1|\, e^{j\alpha_1}\ |\bar{p}_1|\, e^{j\alpha_2}} = e^{j(2\pi-2\alpha_1-2\alpha_2)} = e^{j(2\pi-2(\alpha_1+\alpha_2))}$$



$$\alpha_1 = -(\pi-\alpha_1) = 2\alpha_1 - \pi$$

Z toho je zrejmé, že:

$$|H(j\omega)| = 1$$
$$\varphi(\omega) = 2\pi + 2(\alpha_1+\alpha_2)$$

Dvojbrana má teda nulový útlm pri všetkých reálnych frekvenciách, a posúva fázu.

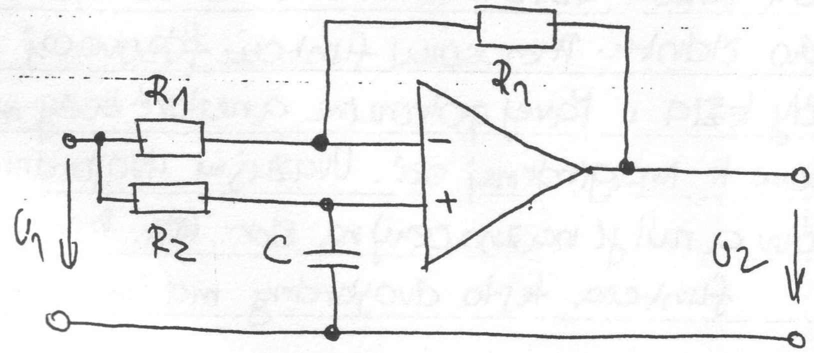
Uvažujme napr. ~~takúto~~ takúto prenosovú funkciu:

$$\varphi(\omega)\ 2\alpha_1 - \pi + 2\alpha_2 - \pi = 2(\alpha_1+\alpha_2) - 2\pi = 2[\alpha_1(\omega)+\alpha_2(\omega)]$$

$$H(p) = \frac{(p-3)(p+4)}{(p+2)(p+5)} = \underbrace{\frac{(p+4)(p+3)}{(p+2)(p+5)}}_{\text{min. arg}}\ \underbrace{\frac{p+3}{p+3}}_{\text{nemin.-fáz. článok}}$$

Možno vidieť, že prenosovú funkciu dvojbrany s neminimálnou fázou možno nahradiť súčinom prenosovej funkcie s minimálnou fázou a prenosových funkcií fázovacích článkov.

Príklad jednoduchej fázovacej dvojbrány je naznačený na obr. 188.



$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = H(p) = \frac{G_2 - pC}{G_2 + pC}$$

Obr. 188

11.13. Vzťah medzi modulom a argumentom prenosovej funkcie.

Uvažujme dvojbránu s prenosovou funkciou $H(p)$ pre ktorú pre $p=j\omega$ platí:

$$H(p)\Big|_{p=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)|\, e^{j\psi(\omega)} \qquad (11-104)$$

Pre logaritmus $H(j\omega)$ potom platí:

$$\ln H(j\omega) = \ln |H(j\omega)|\, e^{j\psi(\omega)} = \ln|H(j\omega)| + j\,\psi(\omega) \qquad (11-105).$$

Vychádzajúc z tejto definície funkcií $|H(j\omega)|$ a $\psi(\omega)$, je možné ukázať, že prenosové funkcie s minimálnym argumentom platí vzťah:

$$\psi(\omega) = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\ln|H(x)|}{x^2-\omega^2}\,dx \qquad (11-106).$$

Rovnicu (11-106) prvýkrát odvodil Bode. Ako z nej vidieť, existuje tu jednoznačný vzťah ~~medzi reálnou a imaginárnou~~ ako aj medzi modulom a fázou (argumentom) prenosovej funkcie dvojbrány s minimálnym argumentom. V prípade syntézy takejto dvojbrány, môže byť potom jednoznačne predpísaná len jedna z týchto dvoch veličín, t.j. buď AFCH alebo FFCH.